

# Apostila

## Planilhas eletrônicas no ensino de física

Versão digital disponível em: [facin.pro.br](http://facin.pro.br)

Prof. Paulo Cesar Facin

pcfacin@gmail.com

DEFIS/UEPG

Ponta Grossa-PR  
2022

## **Apresentação**

Este trabalho é indicado a quem quer se divertir com o estudo e o ensino da Física, uma vez que experimentar a visão de conceitos abstratos é muito prazerosa! Numa época em que a dimensão romântica da Física parece ser de acesso somente aqueles que possuem um elevado poder de abstração, que conseguem imaginar claramente as entidades matemáticas, surgem os computadores e suas potencialidades. Mas, parece que estamos presos a condição de alguém criar um vídeo explicativo de algum conceito mais abstrato para que possamos dar um sentimento de realidade aquela física mais elaborada. Então a ferramenta que será apresentada nesse trabalho é libertadora dessa condição, na medida que é simples de lidar e bastante comum. As planilhas eletrônicas como o Excel (Microsoft-Office) e o Calc (Linux – LibreOffice) propiciam a criação de ambientes gráficos com muitas possibilidades de formatação, duas dessas possibilidades são muito importantes para o estudo e ensino da Física: a primeira é a atualização do valor de uma variável por um simples clicar do mouse, a segunda é a criação simples de um vetor e que também pode ser alterado por um simples clicar do mouse. Então começa a “dança” de curvas, pontos e vetores num gráfico que pode ser muito colorido e destacado, estamos falando de dar movimento as abstrações colocadas num gráfico ou até mesmo tabela de números. A tarefa de criar uma planilha para o estudo de um caso particular da Física exige um razoável entendimento dos conceitos abstratos envolvidos, assim, um professor ou aluno que tinha receio de pensar em algum conceito será desafiado a superar essa barreira, e ele terá a motivação para o desenvolvimento da própria abstração. A utilização de planilhas prontas também oferece esse potencial de desenvolvimento ao se testar as atualizações das variáveis, os limites das constantes, ao ver no gráfico o resultado disso e na velocidade que deseja que as coisas mudem.

O primeiro capítulo desse livro é um tutorial sobre como usar as planilhas, com os assuntos que serão necessários para o desenvolvimento destas. O segundo e o terceiro capítulo são exemplos de aplicação das planilhas no estudo da Mecânica e da Ótica respectivamente, as seções de cada capítulo geralmente iniciam com a descrição do problema e da matemática envolvida, a princípio sem a necessidade de se consultar outra obra, entretanto se esta existir recomenda-se a coleção dos “Haliday”, “Tipler” e “Moysés Nussenzveig” que são extensamente utilizados nos cursos de graduação em Física.

## ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1: Local de ajuda pelo ÍNDICE .....	5
Figura 1.2: Ajuda do Excel. ....	6
Figura 1.3: Célula C1. ....	7
Figura 1.4: Exemplo de como realizar a operação de exponenciação de um número. ....	8
Figura 1.5: Exemplo de como obter o valor absoluto de um número. ....	8
Figura 1.6: Construindo gráficos pelo modo “Dispersão”. ....	9
Figura 1.7: Exemplo de como entrar com os valores de “x” no gráfico. ....	10
Figura 1.8: Exemplo de como construir o gráfico de funções. ....	10
Figura 1.9: Fixando os valores máximo e mínimo de um eixo. ....	11
Figura 1.10: Habilitando a opção “Desenvolvedor”. ....	12
Figura 1.11: Escolhendo o “Botão de Rotação”. ....	12
Figura 1.12: Colocando um botão na planilha. ....	13
Figura 1.13: Construindo um segmento de reta. ....	14
Figura 1.14: Retirando o marcador do segmento de reta e escolhendo a seta. ....	14
Figura 1.15: Exemplo de construção de vetor. ....	15
Figura 2.1: Os vetores e os eixos coordenados com seus vetores unitários. ....	17
Figura 2.2: Planilha desenvolvida para o estudo da soma de dois vetores. ....	18
Figura 2.3: Planilha desenvolvida para o estudo dos produtos entre dois vetores, produto escalar e produto vetorial. ....	19
Figura 2.4: Comparação gráfica das equações (2.6) e (2.7) para $\Delta t=1$ . ....	22
Figura 2.5: Comparação gráfica das equações (2.6) e (2.7) para $\Delta t=0,17$ . ....	22
Figura 2.6: Inserindo as constantes do problema e seus respectivos botões na planilha. ....	24
Figura 2.7: Planilha com o cálculo das posições e velocidades em função do tempo. ....	24
Figura 2.8: Descrição e sintaxe da função SE. ....	25
Figura 2.9: Planilha do movimento bidimensional com lançamento oblíquo e considerando força de atrito. ....	26
Figura 2.10: Constantes a serem usadas no MHS no caso amortecido e seus respectivos botões. ....	27
Figura 2.11: O resultado da planilha para análise do MHS amortecido. ....	28
Figura 2.12: Planilha completa do MHS amortecido. ....	29
Figura 2.13: Esquema para analisar o Movimento Circular Uniforme. ....	29
Figura 2.14: Planilha mostrando a velocidade, aceleração, e projeções da posição da massa para o MCU. ....	31
Figura 2.15: Cálculo das distâncias a partir das coordenadas de dois pontos. ....	32
Figura 2.16: Planilha do Campo Gravitacional de duas massas $m_1$ e $m_2$ em posições fixas. ....	33
Figura 2.17: Campos gravitacionais no plano de um sistema de duas massas que giram em torno de uma mesma origem. ....	34
Figura 2.18: Planilha da onda circular. ....	35
Figura 2.19: Planilha de ondas planas monocromáticas progressivas, em cima duas ondas e em baixo a soma delas. ....	37
Figura 2.20: Em cima duas ondas com frequências próximas, em baixo a soma delas evidenciando o batimento. ....	38
Figura 2.21: Pontos 1 e 2 testando as expressões de velocidades das ondas $v=w/k$ . ....	39
Figura 2.22: Ponto mostrando a velocidade de grupo da soma de duas ondas. ....	40

Figura 3.1: Esquema dos raios de luz, incidente, refletido e refratado na superfície de separação entre dois meios de índices de refração diferentes.	41
Figura 3.2: Planilha para o estudo da reflexão e da refração, mostrando o raio incidente, o refletido e o refratado.....	43
Figura 3.3: Princípio de Huygens na refração. ....	44
Figura 3.4: Três ondas secundárias para o ângulo de incidência $\Theta$ .....	44
Figura 3.5: Esquema para o cálculo da reta tangente a duas circunferências.....	45
Figura 3.6: Planilha para o estudo da refração com o Princípio de Huygens. ....	47
Figura 3.7: Reflexão em dois espelhos ortogonais.....	48
Figura 3.8: Percepção da imagem. ....	49
Figura 3.9: Planilha para o estudo da formação de imagens em espelho plano.....	50
Figura 3.10: Espelho côncavo e espelho convexo. ....	51
Figura 3.11: Espelho côncavo.....	51
Figura 3.12: Espelho convexo e o cálculo da posição da imagem. ....	52
Figura 3.13: Formação de imagem no espelho côncavo para o caso de incidência dos raios em um ponto qualquer do espelho. ....	53
Figura 3.14: Formação de imagem no espelho côncavo para o caso de incidência do raio paralelo ao eixo central e do raio que passa pelo centro de curvatura. ....	54
Figura 3.15: Formação de imagem em superfície esférica e com meios de índices de refração diferentes. ....	55
Figura 3.16: Imagem em superfície de separação entre dois meios com índices de refração diferentes. ....	56
Figura 3.17: Lente biconvexa imersa num meio de índice de refração $n_1$ . ....	57
Figura 3.18: – Esquema para equacionar a localização da origem O da lente.....	58
Figura 3.19: Imagem em uma lente delgada convergente. ....	59
Figura 3.20: Duas ondas planas de mesma frequência são analisadas num ponto do espaço, elas são emitidas de posições diferentes. ....	60
Figura 3.21: Rotação das coordenadas do ponto P em torno do eixo z. ....	60
Figura 3.22: Esquema mostrando o ângulo para decompor o vetor campo elétrico. ....	63
Figura 3.23: Planilha para o estudo da interferência de duas ondas transversais, monocromáticas e progressivas. ....	64
Figura 3.24: Diferença de caminho entre duas ondas.....	65
Figura 3.25: Distribuição de intensidades como função do ângulo de observação.....	67
Figura 3.26: Fenda única de largura a, anteparo muito distante da fenda.....	68
Figura 3.27: Figura de difração em fenda simples. ....	70

# Sumário

<b>Capítulo 1 - Tópicos</b> .....	5
1.1. Usando o Excel (Office 2010) .....	5
1.2. A planilha .....	5
1.3. A ajuda do Excel/Office 2010 .....	5
1.4. Operações básicas .....	6
1.5. Potenciação .....	7
1.6. Uso de parênteses .....	7
1.7. A função seno .....	8
1.8. A função exponencial .....	8
1.9. Valor absoluto de um número .....	8
1.10. Construindo gráficos bidimensionais .....	9
1.11. Usando Botões: .....	11
1.12. Construindo vetores .....	13
<b>Capítulo 2- Mecânica</b> .....	16
2.1. Introdução .....	16
2.2. Vetores .....	17
2.3. O que significa resolver a Segunda Lei de Newton? .....	19
2.4. Movimento Bidimensional, lançamento oblíquo e trajetória .....	22
2.5. MHS amortecido .....	26
2.6. Movimento Circular Uniforme (MCU) .....	29
2.7. Campo Gravitacional .....	31
2.8. Força Gravitacional e MCU. ....	34
2.9. Onda Circular .....	35
2.10. Ondas planas monocromáticas progressivas .....	36
2.10.1. Variando o tempo .....	37
2.10.2. Variando a posição .....	37
2.11. Velocidade de fase .....	38
2.12. Velocidade de grupo .....	39
<b>Capítulo 3 - Ótica</b> .....	41
3.1. Introdução .....	41
3.2. Reflexão e refração .....	41
3.3. Princípio de Huygens e a refração .....	43
3.4. Reflexão em dois espelhos planos ortogonais .....	47
3.5. Formação de imagens nos espelhos planos .....	49
3.6. Espelhos esféricos .....	50
3.7. Refração em superfícies esféricas .....	54
3.8. Lentes Delgadas .....	56
3.9. Interferência de duas ondas .....	59
3.10. Intensidades no problema de interferência em fenda dupla .....	64
3.11. Intensidade para a difração em fenda única .....	67

## Capítulo 1 - Tópicos

### 1.1. Usando o Excel (Office 2010)

Nesta seção pretendemos introduzir os tópicos que serão necessários para o desenvolvimento da proposta das planilhas, nos diversos assuntos e para um leitor que nunca teve contato com esse tipo de planilha eletrônica. Para o leitor que deseja se aprofundar nas potencialidades das planilhas eletrônicas existem vários tutoriais em formato “pdf” e vídeos disponíveis na internet. Por uma questão de experiência acumulada será utilizado o programa Excel que vem junto com o Microsoft Office, entretanto todas as planilhas podem ser construídas de maneira muito semelhante usando o Calc que vem junto com o LibreOffice e que é um software livre.

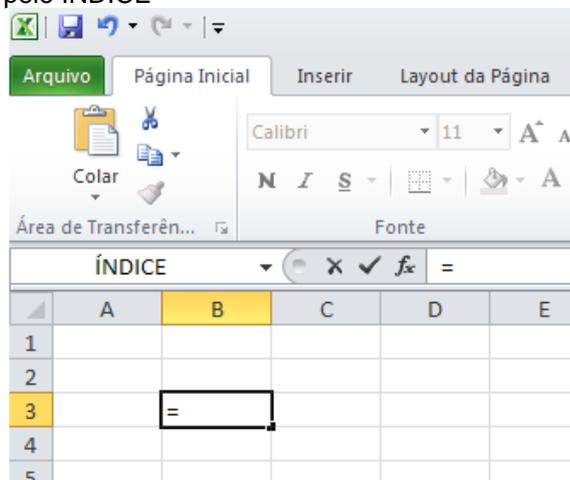
### 1.2. A planilha

Uma planilha é uma matriz com linhas e colunas, as colunas são designadas pelas letras maiúsculas em ordem alfabética, A, B, C, etc. As linhas são designadas por números inteiros em ordem crescente a partir do número 1. Então é preciso de uma letra e um número para designar uma célula específica na planilha, por exemplo, a célula A1. Uma célula pode conter um número, um símbolo, uma palavra ou um texto, e pode também conter uma operação, por exemplo, na célula C1 desejamos somar o valor contido na célula A1 com o valor contido na célula B1. Detalhes de como realizar operações serão descritos a seguir.

### 1.3. A ajuda do Excel/Office 2010

Quando se clica numa célula e é digitado o sinal de igual, aparece logo acima do cabeçalho da planilha no canto esquerdo a palavra ÍNDICE e uma ponta de seta preta, como na figura 1.1.

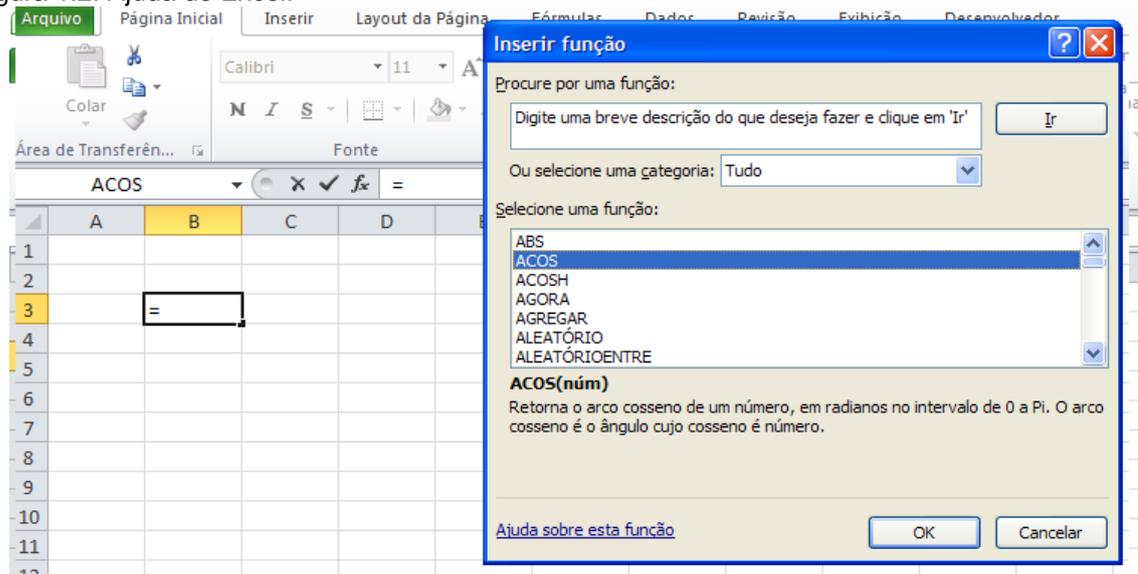
Figura 1.1: Local de ajuda pelo ÍNDICE



Fonte: O autor.

Ao clicar na seta preta um “menu” de opções aparece, como na figura 1.2, e ao se escolher “mais funções” aparece uma lista de funções e uma área para digitar o nome de alguma função que não apareça na tela, essa é a ajuda que será necessária, também aparece uma breve descrição da função. Em versões mais novas do Office a palavra ÍNDICE não aparece, mas o local na tela para esse tipo de ajuda e o procedimento é o mesmo.

Figura 1.2: Ajuda do Excel.



Fonte: O autor.

#### 1.4. Operações básicas

Para realizar uma operação com as células da planilha, como somar o valor da célula A1 com o valor da célula B1, temos que obrigatoriamente escolher uma célula para isto, digamos C1, e digitar nela o sinal de igual “=”. Então podemos digitar  $A1 + B1$ , ou logo após digitar “=” clicar na célula A1, digitar “+” e clicar na célula B1, daí acionamos a tecla “enter” e o resultado da operação será mostrado na célula C1. Assim, podemos alterar os valores das células A1 e B1 que o valor da soma na célula C1 será automaticamente calculado.

Além disso, podemos usar o recurso de “arraste” da célula C1 para generalizar a operação realizada na célula C1 para toda a coluna A e coluna B, ou seja, na célula C2 será realizada a soma  $A2 + B2$  e assim por diante  $C3 = A3 + B3$ . Entretanto, existem dois tipos de arraste de uma célula, clicando na célula ela fica selecionada e clicando no canto inferior direito da célula (já selecionada na figura 1.3a) com o botão esquerdo do mouse e mantendo apertado obtemos o efeito descrito acima, figura 1.3b.

A subtração é obtida usando o símbolo “-“, no caso das células anteriores teríamos  $C1 = A1 - B1$ .

A multiplicação é obtida usando o símbolo “\*“, no caso das células anteriores teríamos  $C1 = A1 * B1$ .

A divisão é obtida usando o símbolo “/“, no caso das células anteriores teríamos  $C1 = A1 / B1$ .

Figura 1.3: Célula C1.

	A	B	C	D
1	1	2	3	
2	3	2		
3	4	4		
4	5	6		
5				
6				

Figura 1.3a – Célula C1 selecionada, a operação contida nela é mostrada logo acima na figura como  $=A1+B1$ .

Fonte: O autor.

	A	B	C	D	E
1	1	2	3		
2	3	2	5		
3	4	4	8		
4	5	6	11		
5					
6					

Figura 1.3b – Célula C1 sendo arrastada até a linha 4.

### 1.5. Potenciação

Para elevar o valor de uma célula a uma potência, por exemplo, 2 usamos o símbolo “^”, por exemplo,  $C1 = A1^2$ , significa que o valor de A1 será elevado ao quadrado. Podemos usar ainda uma potência fracionária  $C1 = A1^{(1/2)}$  ou  $C1 = A1^{0,5}$  e também potencias negativas.

### 1.6. Uso de parênteses

O uso de parênteses serve para priorizar operações quando são usadas mais de uma operação na mesma célula, por exemplo,  $C1 = (A1+B1)/(A1*B1)$ . Os parênteses neste caso indicam que o resultado da operação  $A1+B1$  será dividido pelo resultado de  $A1*B1$ , se não tivessem os parênteses teríamos o resultado de  $B1/A1$  multiplicado por B1 e depois somado com A1. Temos que lembrar que a multiplicação e a divisão estão no mesmo “nível” de prioridade e tem prioridade maior sobre a soma e a subtração (que estão no mesmo nível), isto quer dizer que uma multiplicação será

realizada antes de uma soma, como por exemplo em  $C1 = A1 + B1 * A1$  primeiro será feito o produto de  $B1 * A1$  e o resultado será somado a  $A1$ .

### 1.7. A função seno

SEN(A1) calcula o seno do valor contido na célula A1, considerando que o valor da célula A1 está expresso em radianos, que é um ângulo expresso em frações de Pi radianos. Existe a função GRAUS(A1) que converte o valor de A1 em radianos para graus e a função RADIANOS(A1) que converte o valor de A1 em graus para radianos. O mesmo vale para a função COS(A1).

Muitas vezes o corretor de texto do Excel altera SEN para SEM e com isso aparece a mensagem #NOME?, para contornar essa situação devemos corrigir SEM para SEN usando CTRL + Z.

### 1.8. A função exponencial

A função EXP(A1) retorna a exponencial de A1 com a base sendo o número de Euler 2,71828182845904. Na Figura 1.4 mostramos essa operação na célula C3.

Figura 1.4: Exemplo de como realizar a operação de exponenciação de um número.

	A	B	C	D	E
1					
2		num	exp(num)		
3		1	2,718281828		

Fonte: O autor.

### 1.9. Valor absoluto de um número

Muitas vezes necessitamos do valor absoluto de um número, isto pode ser feito com a função ABS(A1), exemplo na figura 1.5.

Figura 1.5: Exemplo de como obter o valor absoluto de um número.

	A	B	C	D	E
1					
2		num	ABS(num)		
3		-1	1		

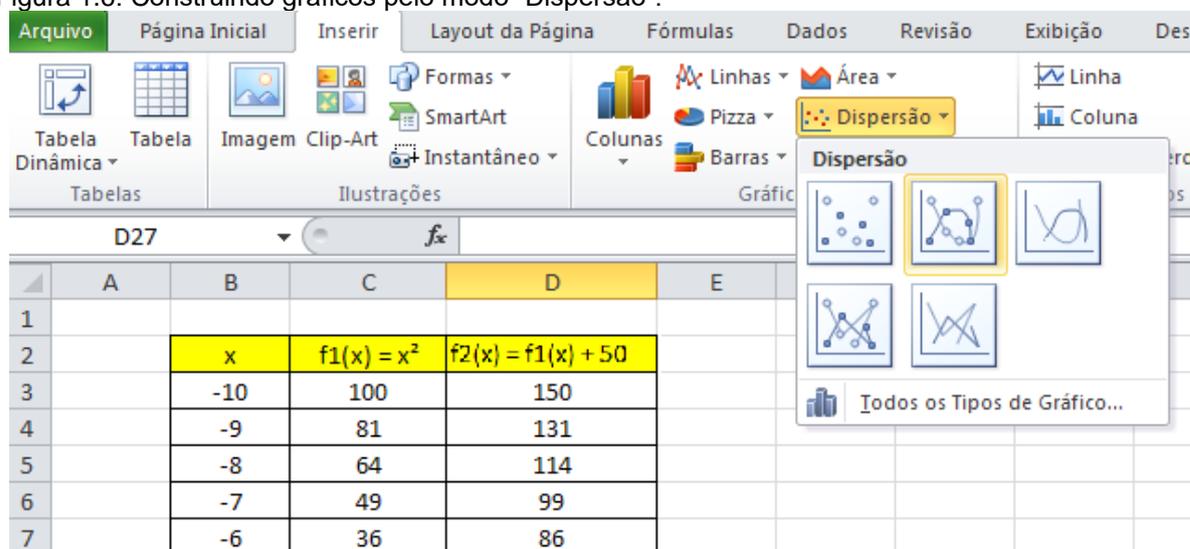
Fonte: O autor.

### 1.10. Construindo gráficos bidimensionais

O tipo de gráfico que usaremos é o tipo “dispersão” e suas três variantes, somente pontos, somente linhas suaves e com pontos conectados por linhas suaves. Para construirmos um gráfico é preciso uma sequência de pontos, ou seja, uma coluna de valores a serem representados no eixo vertical e outra coluna de valores a serem representados no eixo horizontal. Podemos representar várias sequências de pontos, ou seja, várias curvas no mesmo gráfico. A sequência para essa construção é a seguinte:

- Criadas, por exemplo, três colunas de pontos, o primeiro passo é clicar na aba “inserir” e depois no ícone de gráfico “dispersão” e então escolher uma das três formas de gráfico por dispersão. Como na figura 1.6.

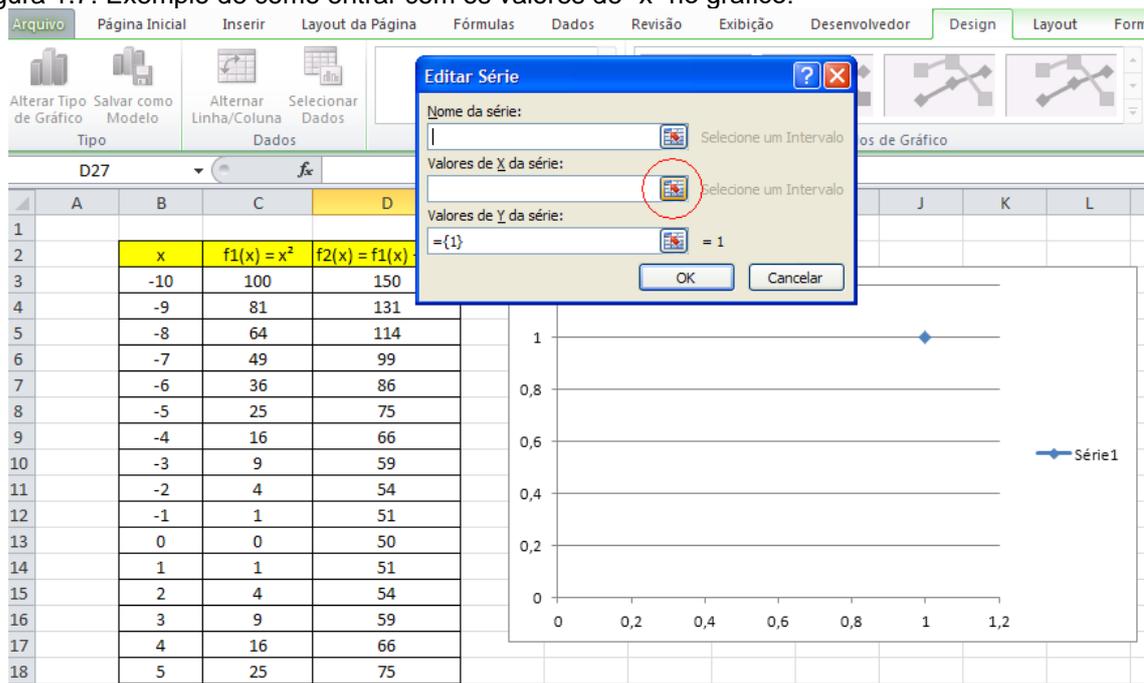
Figura 1.6: Construindo gráficos pelo modo “Dispersão”.



Fonte: O autor.

- O segundo passo é na verdade uma sequência de passos. Depois de escolhido a forma de apresentação dos pontos no gráfico (passo anterior) uma janela branca será mostrada na tela. Com o botão direito do mouse clicar sobre a área branca e escolher a opção “Selecionar Dados”. Uma janela chamada “Selecionar fonte de Dados” aparecerá, clicamos na opção “Adicionar” e uma outra janela se abre perguntando o “Nome da série” que não precisa ser preenchida necessariamente. Clicamos então no canto inferior direito da opção “Valores de x da série”, mostrado na figura 1.7 com um círculo vermelho.

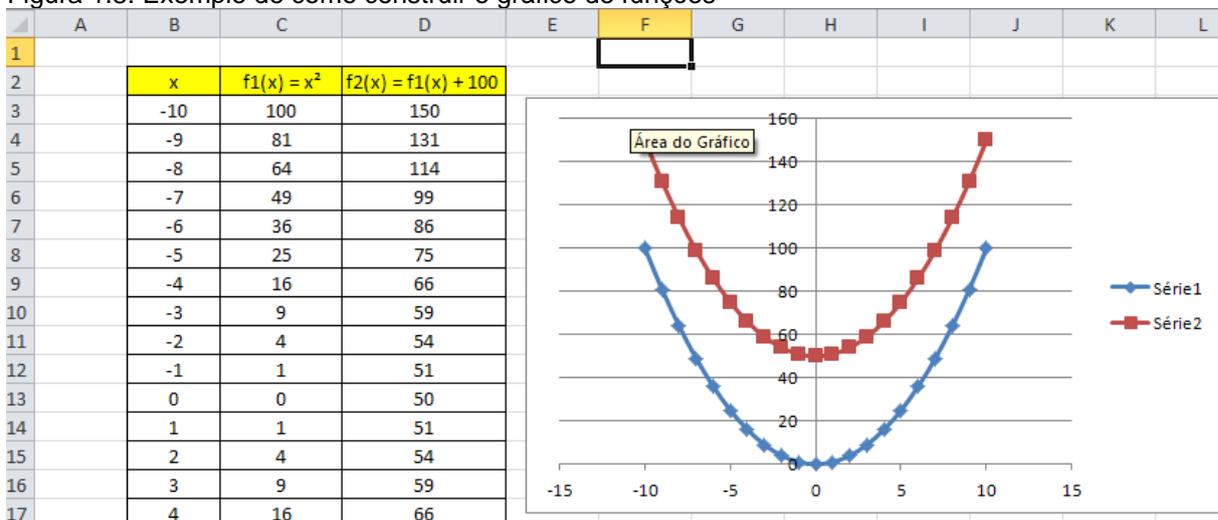
Figura 1.7: Exemplo de como entrar com os valores de “x” no gráfico.



Fonte: O autor.

Então surgirá uma janela “Editar Série” e podemos clicar na célula inicial dos valores de “x” e arrastar o mouse com o botão esquerdo pressionado até o último valor de “x”. Daí podemos pressionar a tecla “enter” ou clicar no canto inferior direito da janela. Aparecerá então novamente a janela “Editar Série” e podemos fazer o mesmo procedimento para entrar com os valores de “y” (valores do eixo vertical). Pressionamos a tecla “enter” o gráfico  $y(x)$  é construído e o Excel volta a mostrar a janela “Selecionar fonte de Dados”, podemos então fazer o mesmo procedimento a partir do segundo passo para construir juntamente o gráfico de outra função  $f(x)$ . O resultado é mostrado na figura 1.8.

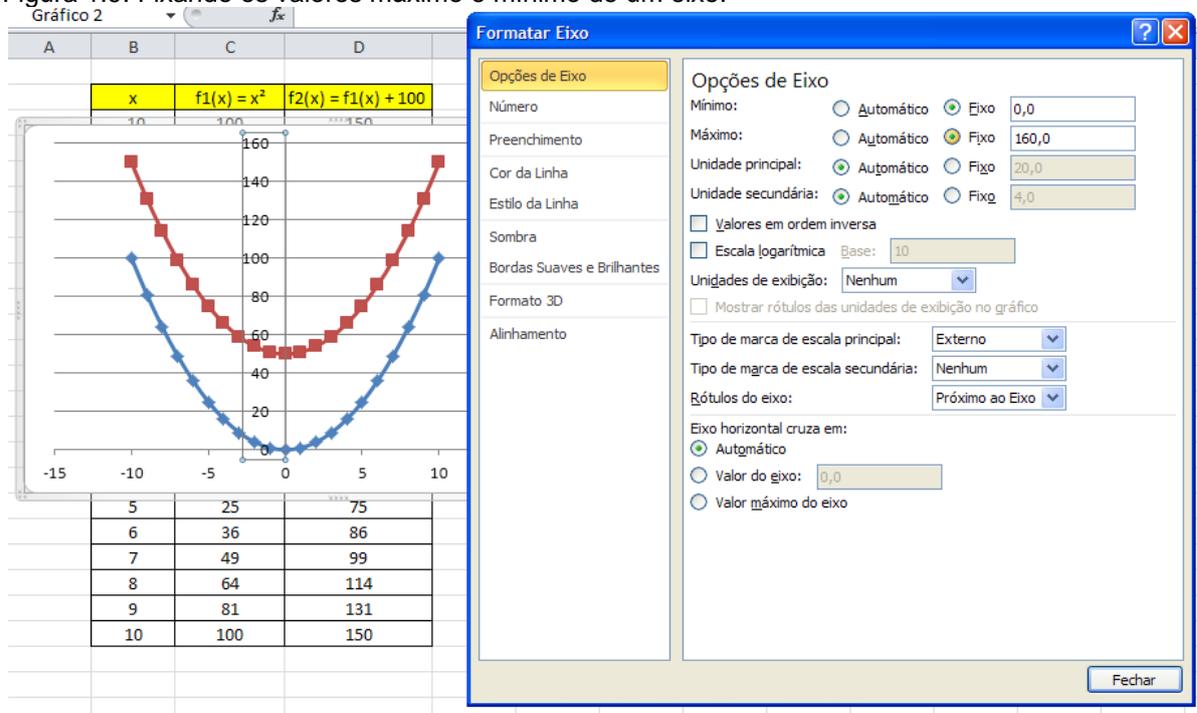
Figura 1.8: Exemplo de como construir o gráfico de funções



Fonte: O autor.

- O terceiro passo seria controlar as formatações do gráfico, legenda dos eixos “x” e “y”, tipo de ponto (marcador, cor, transparência, etc), tipo de linha (se vai ter linha ou não, espessura, pontilhada, etc). As linhas horizontais de referência podem ser retiradas.
- O quarto passo pode ocorrer quando há a necessidade fixar os eixos. Muitas vezes desejamos mudar os valores dos pontos, e neste caso o gráfico se atualiza automaticamente. Para fixar os valores máximos e mínimos dos eixos, clicamos no eixo para selecioná-lo e dando um duplo clic para abrir a janela “Formatar Eixos”, mostrada figura 1.9, então se escolhe fixar máximo e/ou mínimo nas “Opções de eixo”.

Figura 1.9: Fixando os valores máximo e mínimo de um eixo.

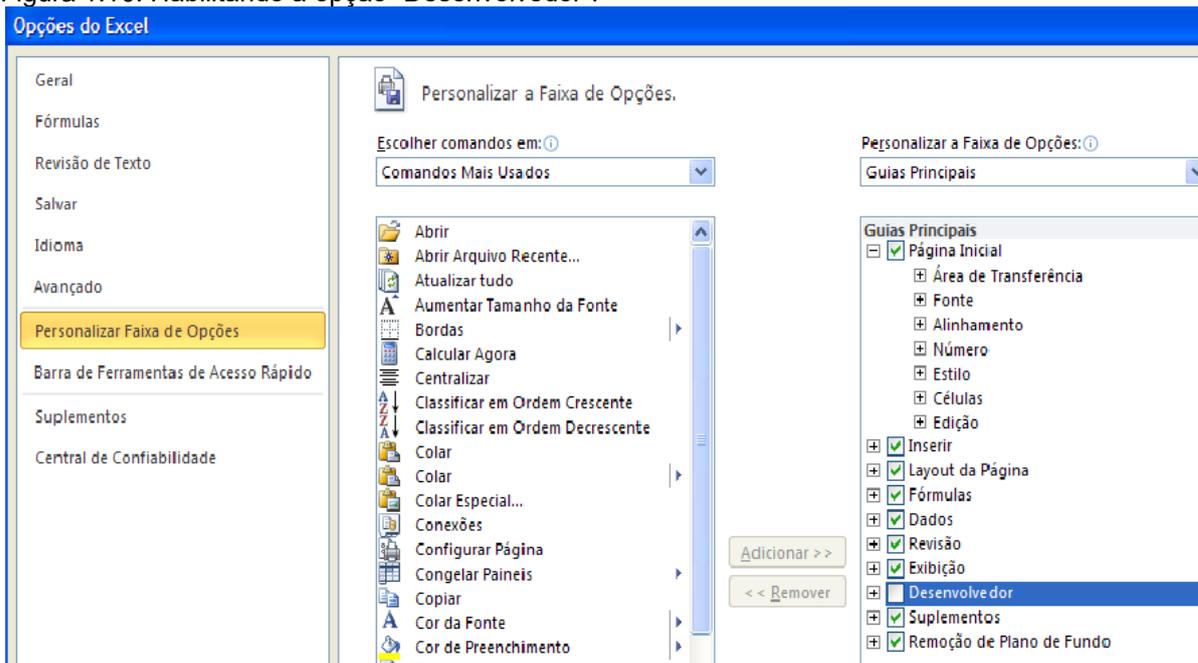


Fonte: O autor.

#### 1.11. Usando Botões:

- O primeiro passo é habilitar a aba “desenvolvedor”, no Excel do Office 2010 devemos clicar na aba “Arquivo” e selecionar “opções”, a janela “Opções do Excel” se abrirá e então clicamos em “Personalizar faixa de opções” e uma nova janela se abre, como na figura 1.10, no lado direito habilitamos a opção “desenvolvedor”.

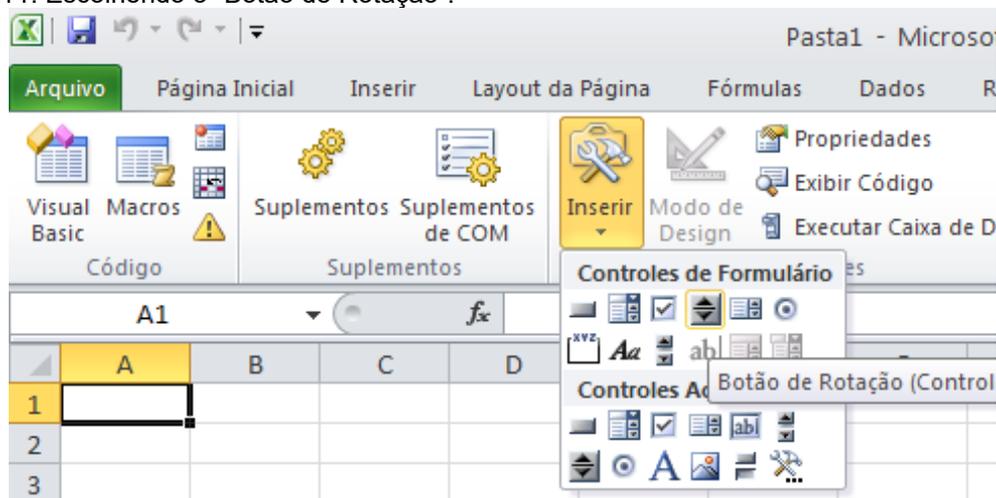
Figura 1.10: Habilitando a opção “Desenvolvedor”.



Fonte: O autor.

- O segundo passo então é dado ao se clicar na aba, agora disponível, “Desenvolvedor” e logo em seguida no ícone “Inserir”, uma janela pequena “Controles de formulário” se abre com várias opções de botões, escolhemos o “botão de rotação” como mostrado na figura 1.11.

Figura 1.11: Escolhendo o “Botão de Rotação”.

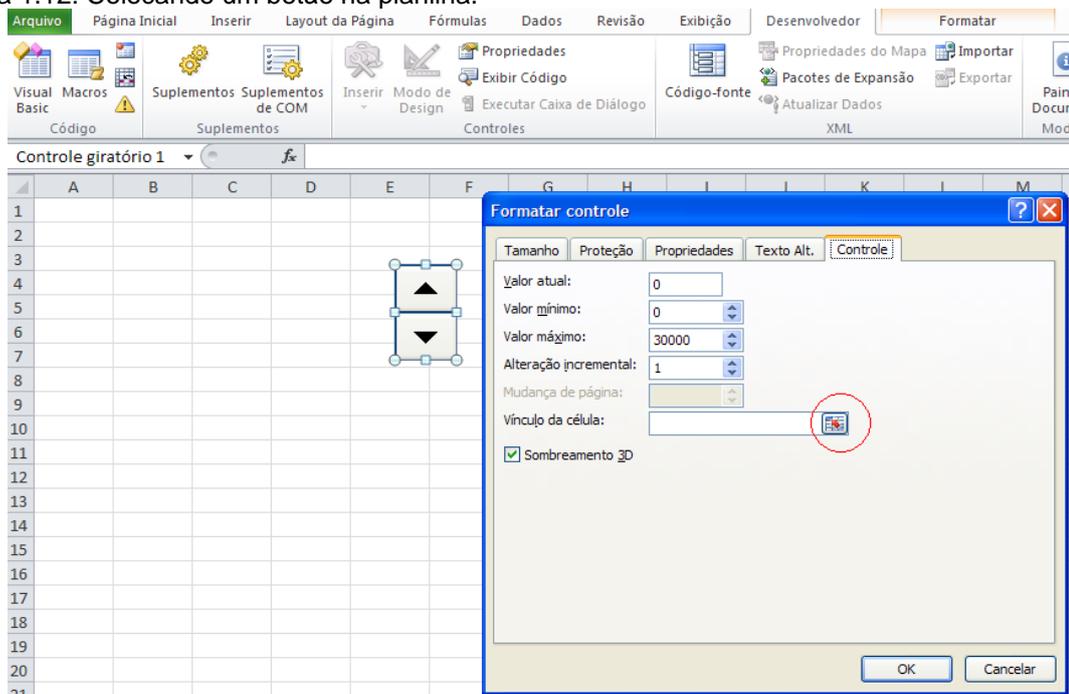


Fonte: O autor.

- No terceiro passo clicamos na opção “Botão de rotação” e com o botão esquerdo do mouse pressionado arrastamos o cursor sobre a planilha, um botão será desenhado e já ficará selecionado. Clicamos então com o botão direito do mouse sobre o botão desenhado e escolhemos a opção “Formatar controle” na nova janela. A opção a ser escolhida agora é “vínculo da célula”, podemos digitar o endereço da célula que se quer vincular a ação do botão, ou clicar no canto

inferior direito mostrado com um círculo vermelho na figura 1.12, então ao clicamos diretamente na célula escolhida e novamente no símbolo de entrada (círculo vermelho). Agora é só clicar fora do botão e ele estará habilitado, ou seja, ao clicar no botão o valor da célula escolhida deverá aumentar uma unidade.

Figura 1.12: Colocando um botão na planilha.



Fonte: O autor.

- O quarto passo é dado se for necessário obter valores negativos ou decimais para a ação de um botão, podemos fazer isso usando outra célula com a operação de multiplicação do valor da célula que o botão controla por um decimal. Por exemplo, se a célula que o botão controla é A1, podemos utilizar a célula A2 = 0,1\*A1 e a célula A2 passará a ser controlada pelo botão com valores incrementados de 0,1 em 0,1. Para valores negativos fazemos, por exemplo, A2 = A1 – 200 e os valores de A2 começam em -200 quando o valor do botão é zero e continuam negativos até o valor zero, a partir daí os valores são positivos novamente.

## 1.12. Construindo vetores

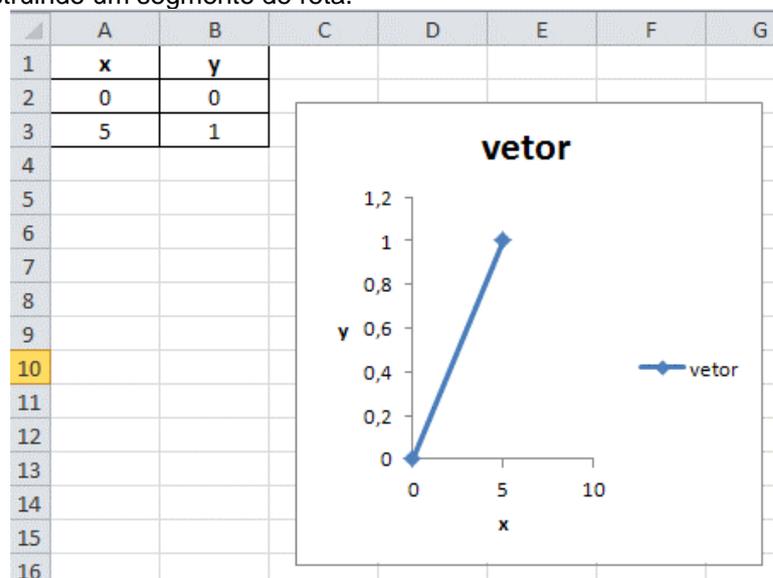
A ideia para representar um vetor bidimensional é usar um segmento de reta entre dois pontos e a opção de formatação desse segmento com uma seta na extremidade.

- O primeiro passo então é criar o segmento de reta e para isso necessitamos de dois pontos, um que representará o início do segmento e outro o fim. O primeiro

ponto será um par  $(x_1, y_1)$  e o outro  $(x_2, y_2)$ , podemos usar então quatro células, por exemplo, (A1,B1) e (A2, B2).

- O segundo passo é construir um gráfico com uma série representando esses dois pontos, como na figura 1.13, onde foi usado (A2,B2) e (A3,B3).

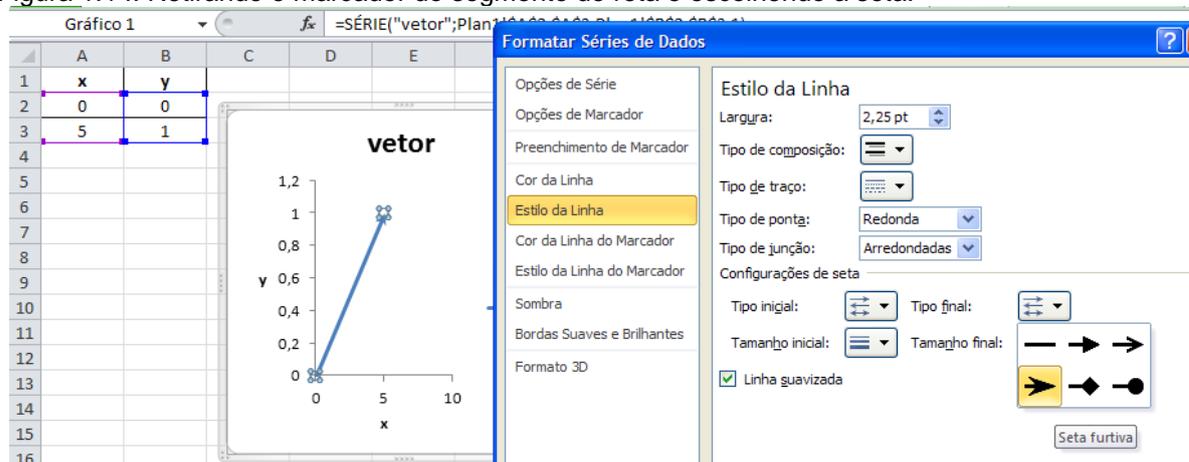
Figura 1.13: Construindo um segmento de reta.



Fonte: O autor.

- O terceiro passo é a formatação do segmento de reta, clicamos com o botão esquerdo no segmento de reta selecionando-o e depois clicamos com o botão direito e escolhemos “Formatar série de dados”, ou é só dar um duplo clic no segmento de reta. Irá abrir uma janela com várias opções, na “opção de marcador” escolhemos “nenhum”, depois em “Estilo da linha” (não confundir com a “Estilo da linha do marcador”) abrindo uma janela que mostra algumas opções de setas, mostrado na figura 1.14.

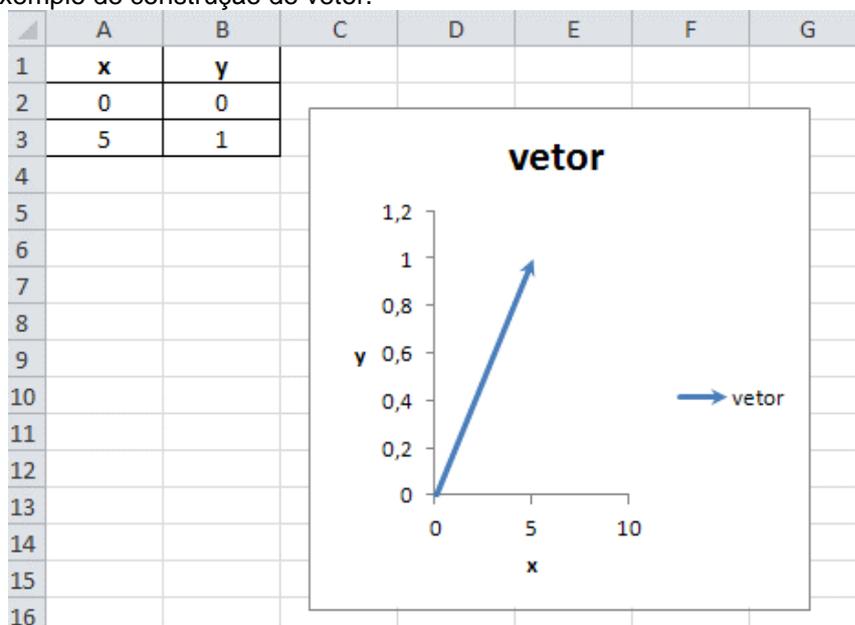
Figura 1.14: Retirando o marcador do segmento de reta e escolhendo a seta.



Fonte: O autor.

Agora escolhamos a ponta de seta desejada na opção “configurações de seta” e pronto, o vetor construído está mostrado na Figura 1.15!

Figura 1.15: Exemplo de construção de vetor.



Fonte: O autor.

Na figura 1.15 podemos perceber que se usarmos botões para variar os valores das células A2, A3, B2 e B3, o vetor mostrado será atualizado em todas as suas propriedades, módulo, sentido e direção.

Agora estamos aptos a desenvolver muitas planilhas para o estudo da física e da matemática!

## Capítulo 2- Mecânica

O objetivo desse trabalho é exemplificar o potencial de uso das planilhas eletrônicas no estudo da física e da matemática, assim, os temas abordados não seguem necessariamente a sequência geralmente apresentada nos livros didáticos dos cursos de graduação em física.

### 2.1. Introdução

Olhar para as equações de movimento de um corpo e abstrair aspectos de seu movimento que sejam interessantes, que motivem uma maior investigação por parte do aluno de um curso de mecânica é algo bastante difícil. Em meio a uma matemática carregada de vetores que são entes abstratos com módulo, direção e sentido e que ainda podem mudar de ponto para ponto no espaço e, além disso, mudar tudo isso no tempo, qualquer um pode ficar confuso! Então visualizar exemplos, manipular estes exemplos, o aluno mesmo construir esses exemplos, contribui para o desenvolvimento da abstração tornando as planilhas eletrônicas muito atraentes, apesar destas já apresentarem um caráter sedutor quando se explora seus formatos de linhas, marcadores, fontes, etc.

A facilidade de se explorar os assuntos da física com situações problema é mais um dos pontos que tornam atraente o uso das planilhas eletrônicas, e em alguns casos ajudam a explicitar deficiências de formação que estavam ocultas, como por exemplo, o entendimento de vetores e seu módulo, sua direção e sentido. Ao desafiar os estudantes a construir, ou consertar, uma planilha, seus esforços para isso os impulsionam a refletir a parte abstrata do conteúdo em questão, e que era negligenciada por não haver um bom motivo para isso.

Esse material pode ser utilizado para trabalhar a física ou a matemática com acadêmicos de graduação e alunos do ensino médio. Em muitos casos a matemática utilizada extrapola o contexto do ensino médio, mas nesses casos o professor de física ou matemática pode deixar de lado a parte de dedução matemática e usar apenas as funções finais, que são as soluções das equações mais complicadas.

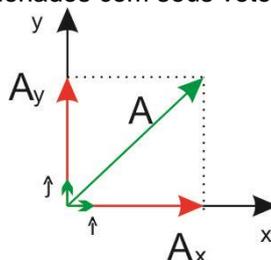
Nesse capítulo veremos alguns exemplos de como aplicar os “botões” para evoluir em alguns casos a variável tempo e em outros casos a variável posição, ângulo, etc. Mas antes disso, usaremos uma planilha para fazer uma revisão da matemática usada nas operações com “vetores”, ou seja, o módulo de um vetor, suas

componentes ao longo dos eixos, soma de vetores, etc. Uma estratégia interessante é usar um roteiro de tarefas/desafios.

## 2.2. Vetores

Vamos estudar o caso bidimensional que possui grande generalidade. Para desenvolver o roteiro de tarefas podemos pensar na decomposição dos vetores nos eixos  $x$  e  $y$  usando suas projeções em tais eixos e os vetores unitários (que possuem módulo 1) “ $\hat{i}$ ” e “ $\hat{j}$ ” que estão respectivamente nas direções  $x$  e  $y$ . Com isso, qualquer vetor  $\vec{A}$  pode ser colocado como  $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ , onde  $A_x$  é o número de vezes que o vetor unitário “ $\hat{i}$ ” entra na componente “ $x$ ” de  $\vec{A}$  e o mesmo para  $A_y$ . Na figura 2.1 veja que decompor um vetor é o “inverso” de somar vetores, ou seja, podemos ver que somando dois vetores  $A_x\hat{i}$  e  $A_y\hat{j}$  obtemos o vetor  $\vec{A}$ .

Figura 2.1: Os vetores e os eixos coordenados com seus vetores unitários.



Fonte: O autor.

### Roteiro para vetores:

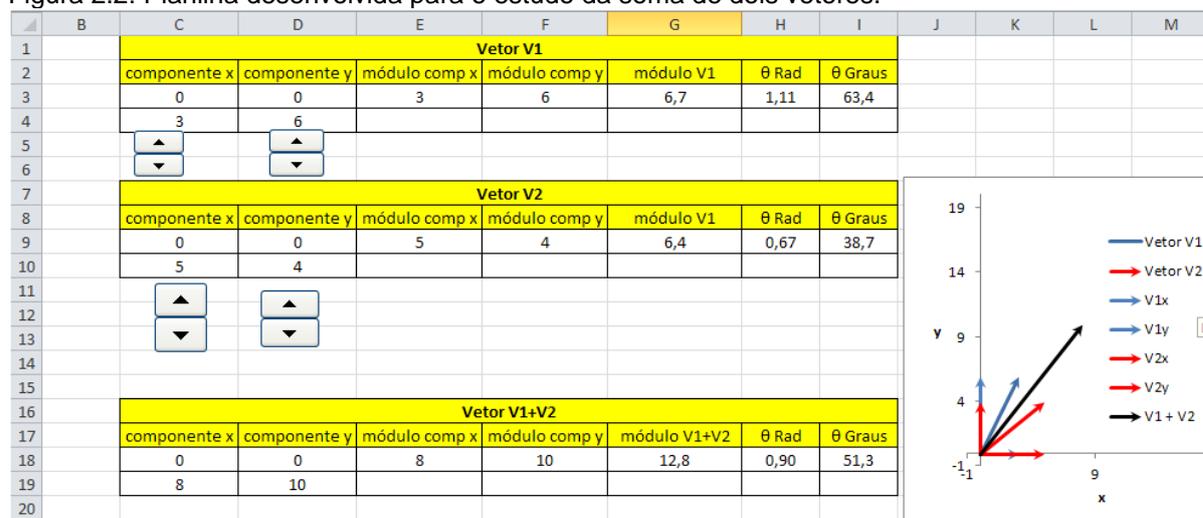
- Como visto no capítulo Tópicos, construa um vetor  $V_1$  e coloque ele em um gráfico;
- Decomponha  $V_1$  nos eixos coordenados e mostre os vetores correspondentes no gráfico;
- Crie botões para controlar as componentes do vetor  $V_1$ ;
- Numa célula calcule o módulo e em outra a direção do vetor.
- Construa outro vetor  $V_2$  e coloque ele no mesmo gráfico;
- Decomponha  $V_2$  nos eixos coordenados e mostre os vetores correspondentes no gráfico;
- Crie botões para controlar as componentes do vetor  $V_2$ ;
- Construa o vetor soma  $V_1 + V_2$ , e numa célula calcule seu módulo e em outra a sua direção.
- Podemos agora numa outra planilha, calcular o produto escalar de dois vetores.

- Observe o que acontece com o vetor resultante do produto escalar à medida que variamos as componentes dos dois vetores.
- Calcule nessa planilha ainda o produto vetorial entre  $V_1$  e  $V_2$ .
- Faça um gráfico com os dois vetores e adicione um segmento de reta cruzando os quadrantes 1 e 3 passando pela origem, “formate” o segmento com uma linha pontilhada e com uma seta na origem do segmento para representar o eixo z.
- Coloque no gráfico o vetor resultante do produto  $V_1 \times V_2$  sobre o eixo z do gráfico.

Estas planilhas então possibilitarão variar as componentes dos vetores e visualizar o que ocorre com todos os vetores envolvidos nas operações com vetores.

Nesse exemplo será necessário fixar os valores máximos dos eixos do gráfico para poder visualizar o efeito de alterarmos as componentes do vetor. O resultado final da soma é ilustrado na figura 2.2 e do produto vetorial na figura 2.3.

Figura 2.2: Planilha desenvolvida para o estudo da soma de dois vetores.

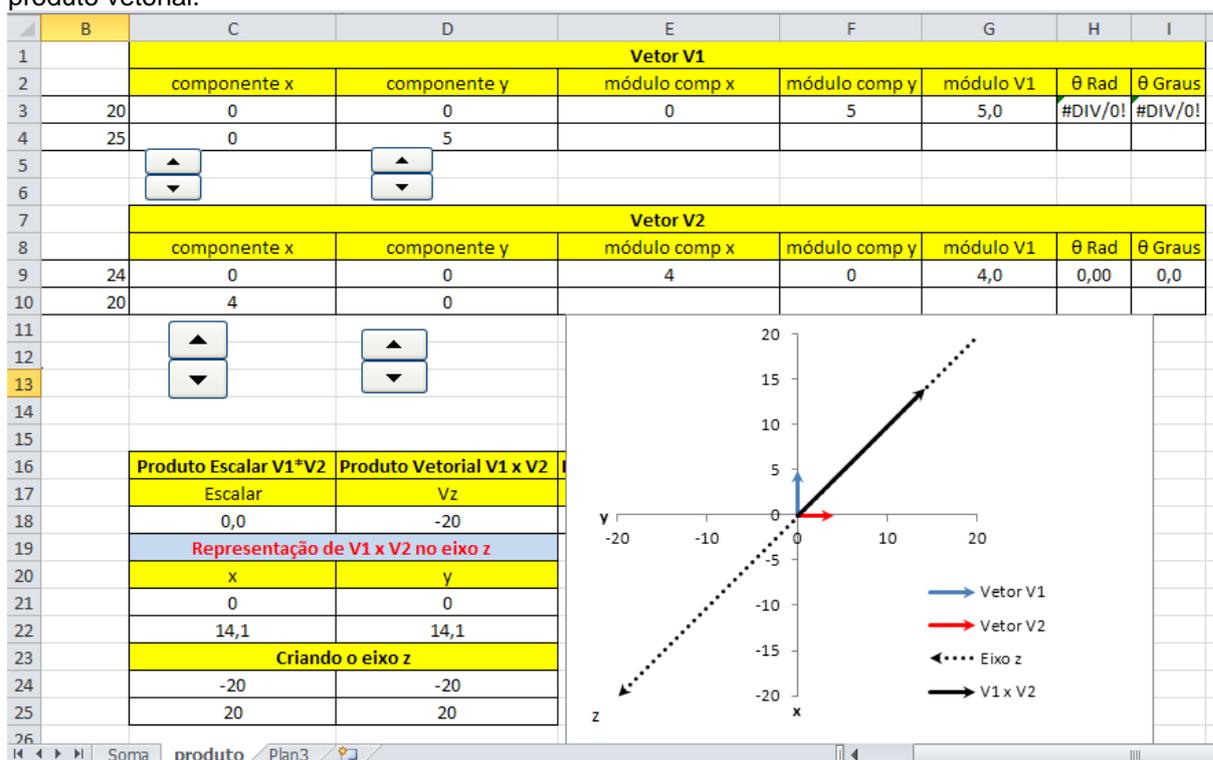


Fonte: O autor.

Note que para conseguirmos gerar números negativos com um botão, temos que usar outra célula vinculada a célula que o botão atua, ou seja, no exemplo da figura 2.3 usamos a célula B3 para atuação do botão que controla a variável “x” e a célula C4 para a operação  $C4 = B3 - 20$ . Assim, ao acionar o botão de controle de “x” teremos os valores -20,-19,-18...,0,1,2,3... na célula C4.

Uma estratégia para a utilização da planilha é zerar a componente x do vetor azul e a componente y do vetor vermelho, então variar as componentes que sobraram uma por vez, veremos que as componentes são a projeção, como a sombra, do vetor que é a soma delas.

Figura 2.3: Planilha desenvolvida para o estudo dos produtos entre dois vetores, produto escalar e produto vetorial.



Fonte: O autor.

### Dicas para a utilização da planilha da figura 2.3:

Com os vetores apresentados na figura 2.3 podemos variar a componente x do vetor 1 (azul no gráfico) e perceberemos que o produto vetorial não é alterado (célula D18), assim como a componente y do vetor 2 também não altera o produto vetorial! Mas, essas mudanças alteram o produto escalar (célula C18) dos dois vetores. No entanto mudanças nas outras componentes alteram o produto vetorial e não alteram o produto escalar! Uma boa oportunidade para pensar nas projeções dos vetores no eixo x e no eixo y.

2.3. Para o estudo da mecânica é importante pensar em: O que significa resolver a Segunda Lei de Newton?

Muitas vezes encontramos a solução para a equação diferencial que rege o movimento de uma partícula clássica, ou seja, a Segunda Lei de Newton da mecânica, mas o que estamos fazendo ao encontrar essa solução? Podemos escrever essa lei como na equação (2.1), onde a força  $\vec{F}$  é igual a variação do vetor “quantidade de movimento”  $\vec{p}$  no tempo.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.1)$$

Para o caso unidimensional de uma partícula com massa constante se deslocado na direção “x” a equação (2.1) é escrita como:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \hat{i}. \quad (2.2)$$

Usemos agora o exemplo da Lei de Hooke onde uma massa “m” oscila presa a uma mola de constante de mola “k”, ou seja, uma força restauradora, contrária ao sentido de deformação da mola, que quer devolver a massa a sua posição de equilíbrio e é dada pela equação (3):

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \quad (2.3)$$

onde  $\vec{x}$  é o vetor deslocamento da extremidade livre da mola a partir da posição de repouso (elongação da mola).

Aplicando a Segunda Lei de Newton temos,

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t). \quad (2.4)$$

Geralmente, nos primeiros cursos de mecânica, somos orientados a pensar na solução desta equação com a ajuda de uma pergunta: Qual é a função  $x(t)$  que derivada duas vezes no tempo resulta nela mesma multiplicada por uma constante negativa? E a resposta é  $\text{sen}(wt)$ ! No entanto, podemos explicitar a derivada segunda em termos de um limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , ou seja,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + 2\Delta t) - 2x(t + \Delta t) + x(t)]}{\Delta t^2}. \quad (2.5)$$

A Segunda Lei de Newton fica então,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + 2\Delta t) - 2x(t + \Delta t) + x(t)]}{\Delta t^2} = -\frac{k}{m} x(t). \quad (2.6)$$

E agora podemos ver claramente que a solução da equação (2.6)  $x(t)$  é uma função do tempo tal que ela no instante de tempo  $t + 2\Delta t$  subtraída de duas vezes ela mesma no instante de tempo  $t + \Delta t$  e somada com ela mesma no instante de tempo  $t$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$  resulta na própria função  $x(t)$  multiplicada pela constante  $-\frac{k}{m}$ .

Podemos testar esse raciocínio usando uma planilha para realizar a operação descrita no lado esquerdo da equação (2.6) e comparar com a solução da equação (2.4) (lado direito) dada pela equação (2.7),

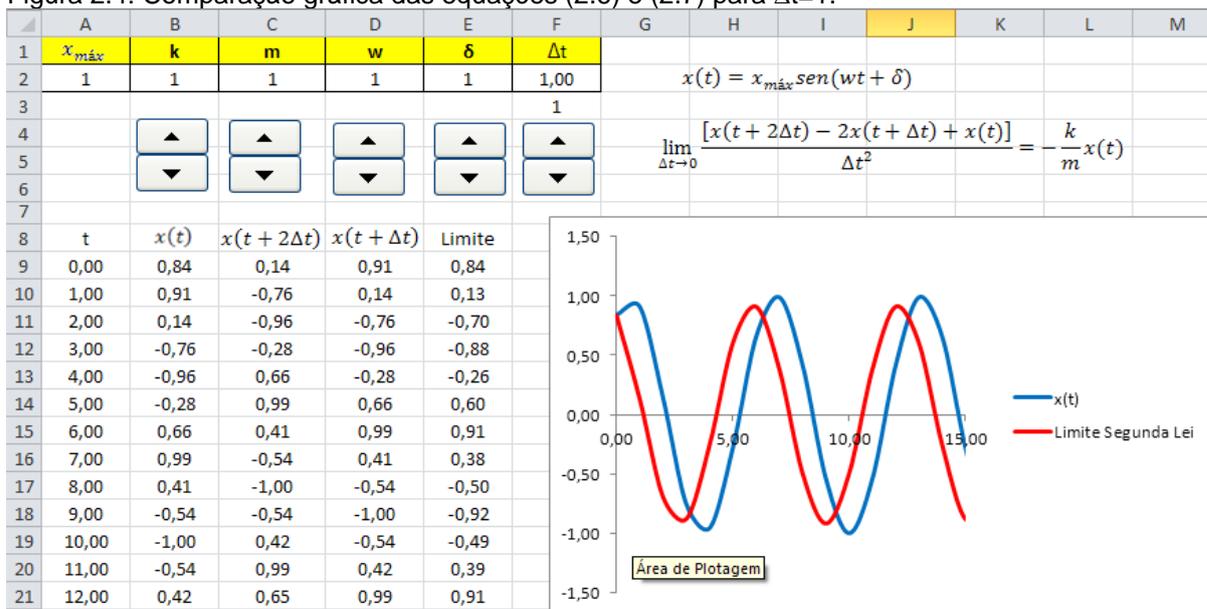
$$x(t) = x_{m\acute{a}x} \text{sen}(wt + \delta), \quad (2.7)$$

onde  $x_{m\acute{a}x}$  é a elongação máxima da mola,  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$  controla a frequência do movimento e  $\delta$  a constante de fase (em que posição a massa está no tempo  $t = 0$ ).

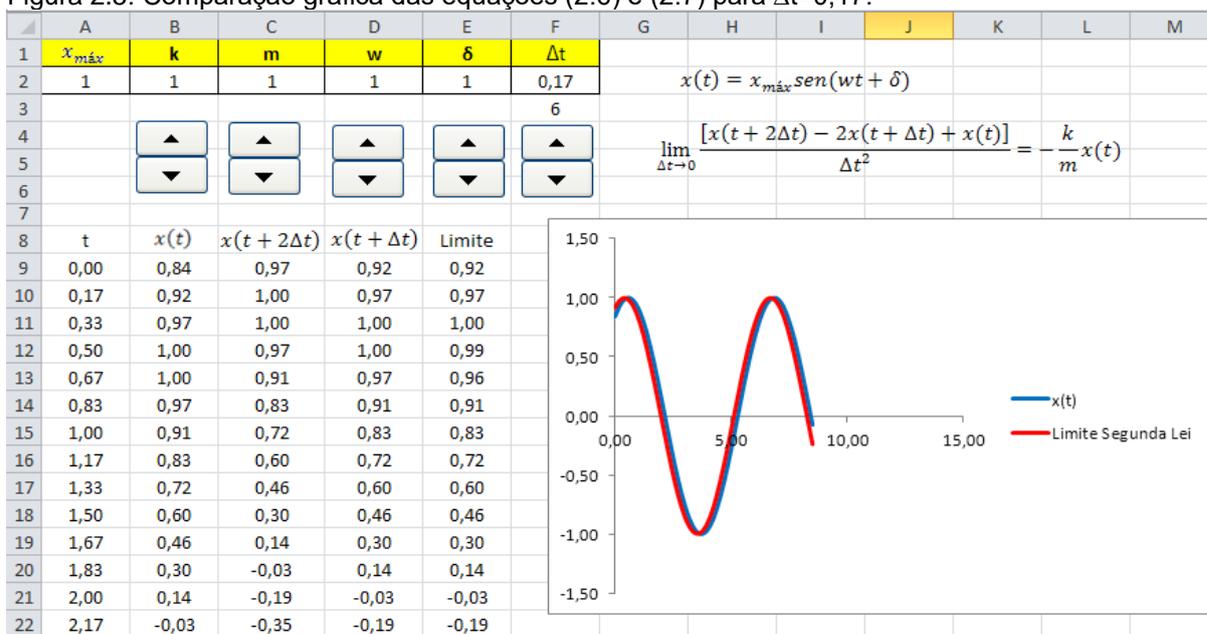
Roteiro para a planilha

- Temos cinco constantes nessa tarefa,  $x_{m\acute{a}x}$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $w$  e  $\delta$ , então devemos usar cinco células para “guarda-las” e botões para variá-las (exceto  $w$  que varia com  $k$  e  $m$ ).
- Temos que fazer um gráfico para representar a equação (2.7), então temos que criar uma coluna para os vários instantes de tempo, o intervalo de tempo  $\Delta t$  entre um instante e outro estará numa célula controlada por um botão com variação decimal, pois queremos controlar o tamanho de  $\Delta t$  e fazer o limite dele indo para zero. Na construção da coluna de tempo temos que travar a célula que controla  $\Delta t$  usando o símbolo “\$”, ou seja, se o valor de  $\Delta t$  fica na célula F2 então, como na figura 4, A10 = A9 + F\$2, A11 = A10 + F\$2, etc .
- Restam 4 colunas a serem criadas para  $x(t)$ ,  $x(t + \Delta t)$ ,  $x(t + 2\Delta t)$  e outra para o cálculo do limite da equação (2.6) (veja que o valor do limite deve ser multiplicado por  $-\frac{m}{k}$ ). Usaremos a equação (2.7) para calcular os valores de  $x(t)$ ,  $x(t + \Delta t)$ ,  $x(t + 2\Delta t)$ .
- Agora temos que construir o gráfico das colunas  $x(t)$  e do cálculo do limite dado por pela equação (2.6) e variar  $\Delta t$  para comparar uma curva com a outra.

O resultado final é mostrado nas figuras 2.4 e 2.5.

Figura 2.4: Comparação gráfica das equações (2.6) e (2.7) para  $\Delta t=1$ .

Fonte: O autor.

Figura 2.5: Comparação gráfica das equações (2.6) e (2.7) para  $\Delta t=0,17$ .

Fonte: O autor.

#### 2.4. Movimento Bidimensional, lançamento oblíquo e trajetória.

Nesse exemplo optamos por observar o comportamento dinâmico do corpo de massa  $m$ , ou seja, a posição da massa será mostrada no gráfico para cada instante de tempo escolhido pelo botão do “tempo”, mas são mantidos os pontos já passados, ou seja, mantida a trajetória passada ou o rastro.

Uma outra aplicação da Segunda Lei de Newton é o caso de um lançamento oblíquo considerando, por exemplo, o atrito com o ar, caso com amortecimento. Veremos que neste caso as equações do movimento da massa  $m$  dependem do valor

da massa. Podemos escolher a força resistiva como proporcional a velocidade, equação (2.8), uma força que faz com que o corpo atinja uma velocidade terminal constante, ou seja, a medida que a velocidade do corpo aumenta, aumenta a força resistiva até que esta se iguale a força peso e a partir daí a força resultante sobre o corpo e, portanto, sua aceleração, são nulas.

$$\vec{F} = -b\vec{v}. \quad (2.8)$$

onde  $b$  é uma constante e  $\vec{v}$  é o vetor velocidade da massa  $m$ .

Então aplicando a segunda lei no caso de uma massa  $m$  sob a ação da aceleração da gravidade  $g$ , obtemos para as direções  $x$  e  $y$ :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt}, \quad (2.9)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - b \frac{dy}{dt}. \quad (2.10)$$

Cujas soluções para as velocidades e posições são:

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-\frac{bt}{m}}, \quad (2.11)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{mv_{x0}}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right), \quad (2.12)$$

$$v_y(t) = \left[v_{y0} + \frac{mg}{b}\right] e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{mg}{b}, \quad (2.13)$$

$$y(t) = y_0 + \left[\frac{m^2g}{b^2} + \frac{mv_{y0}}{b}\right] \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) - \frac{mg}{b}t, \quad (2.14)$$

onde  $v_{x0}$  e  $v_{y0}$  são as velocidades na direção  $x$  e  $y$  respectivamente no instante inicial  $t = 0$ ,  $x_0$  e  $y_0$  são as posições no eixo  $x$  e  $y$  respectivamente no instante inicial  $t = 0$ .

Agora podemos implementar uma planilha para simular estas equações, mostrando as duas trajetórias da massa  $m$ , uma com atrito e outra sem atrito.

É possível eliminar a variável tempo nas equações para  $x(t)$  e  $y(t)$  e obter  $y(x)$ .

### Roteiro

- Temos sete constantes a considerar e que podemos querer variar, as inserimos como na figura 2.6:

Figura 2.6: Inserindo as constantes do problema e seus respectivos botões na planilha.

m	b	$x_0$	$y_0$	$v_{x0}$	$v_{y0}$	g
0,1	0,02	0	0	1	5	3
▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼

Fonte: O autor.

- Podemos fazer um comparativo das equações do movimento com e sem amortecimento, além de  $x(t)$  e  $y(t)$  calculamos as componentes da velocidade da massa  $m$ , como indicado na figura 2.7. O botão nessa figura 2.7 faz variar o “tempo”, lembrando que temos que usar células auxiliares para o incremento ser decimal ao acionar o botão, por exemplo, se o botão incrementa a célula A4 usamos para a célula onde está o valor do tempo  $A3 = 0,1 * A4$ . Estes valores de posição serão usados no gráfico das trajetórias com rastro para marcar a posição das massas no instante de tempo dado pelo botão que varia o tempo.

Figura 2.7: Planilha com o cálculo das posições e velocidades em função do tempo.

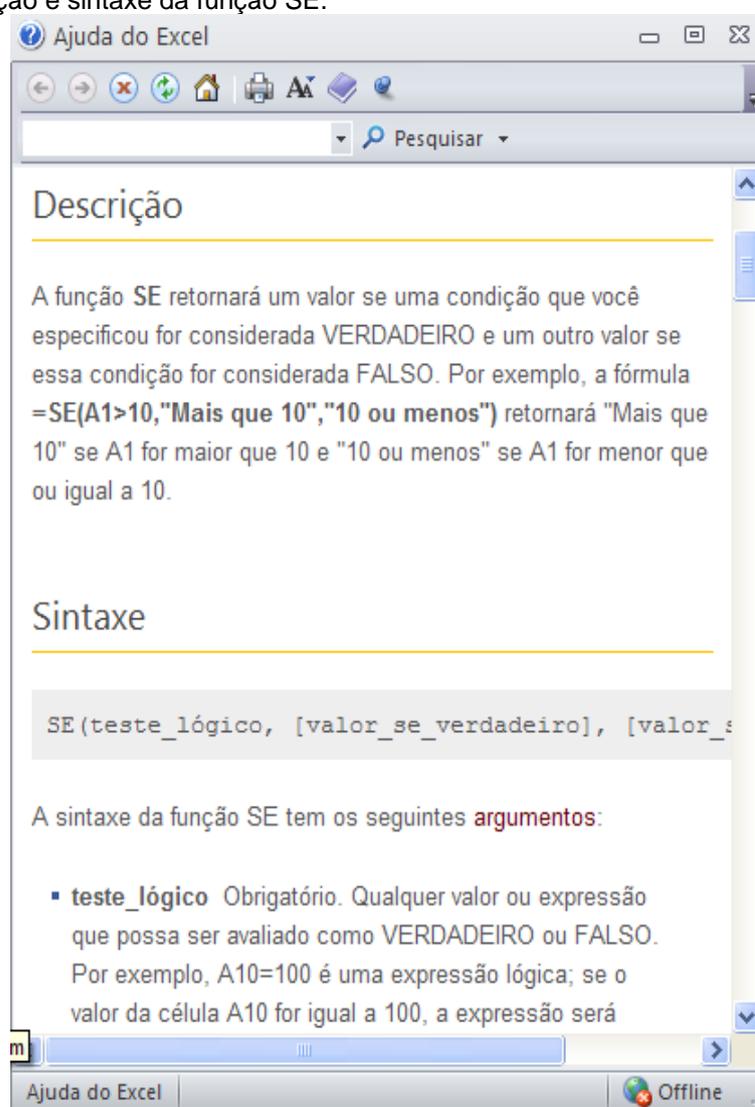
	b ≠ 0				b = 0			
t	$x(t)$	$y(t)$	$v_x(t)$	$v_y(t)$	$x(t)$	$y(t)$	$v_x(t)$	$v_y(t)$
1,3	1,1	3,4	0,8	0,4	1,3	4,0	1	1,1
13								
▲								
▼								

Fonte: O autor.

- Agora podemos construir o gráfico com as coordenadas da massa  $m$  com amortecimento ( $b \neq 0$ ) e sem amortecimento ( $b = 0$ ), mas podemos tornar o gráfico mais atraente ao incorporar nele mais informação sobre as duas trajetórias, ou seja, mostrar as trajetórias ao passo que a massa se desloca deixando um rastro. Para isso usaremos um truque, calcularemos as posições  $x(t)$  e  $y(t)$  para uns 100 instantes de tempo para ambos os casos de amortecimento e usaremos a função SE, descrita mais adiante, para mostrar no gráfico todas as posições  $x(t)$  e  $y(t)$  que antecedem o valor do instante de tempo que o botão que varia o tempo escolhe. Por exemplo, se o instante escolhido pelo botão é  $t = 5$  então todos os valores de  $x(t)$  e  $y(t)$  para  $t < 6$  serão os calculados pelas equações (2.12) e (2.14) aparecendo no gráfico, os valores de posição para valores maiores de tempo serão zerados pela função SE. Ao clicar no botão mais uma vez os valores de posição para  $t = 6$  serão acrescentados no gráfico.

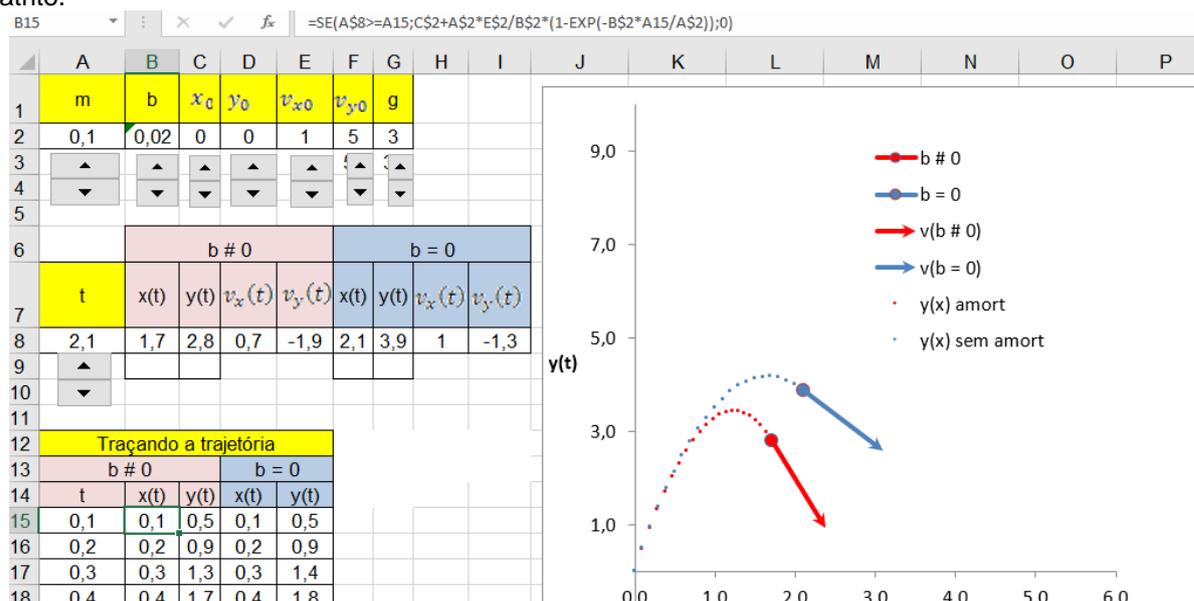
Temos então os pontos das duas trajetórias em cinco (5) colunas, uma para todos os tempos  $t$ , outras duas para  $x(t)$  e  $y(t)$  com  $b \neq 0$  e outras duas para  $x(t)$  e  $y(t)$  com  $b = 0$ . Nestas colunas então usaremos a função “SE” (descrição e sintaxe na figura 2.8), o teste na coluna de  $x(t)$ , por exemplo, como na célula B15 é mostrado na área de função a operação como:  $=SE(A\$8 \geq A15; C\$2 + A\$2 * E\$2 / B\$2 * (1 - EXP(-B\$2 * A15 / A\$2)); 0)$ , ou seja, SE o valor em A\$8 é maior ou igual ao valor em A15 a função SE retorna para a célula B15 o valor de  $C\$2 + A\$2 * E\$2 / B\$2 * (1 - EXP(-B\$2 * A15 / A\$2))$  que é o cálculo da equação (3.12) para a posição  $x(t)$ , senão retorna o valor zero 0. O resultado da planilha esta mostrado na figura 2.9

Figura 2.8: Descrição e sintaxe da função SE.



Fonte: O autor.

Figura 2.9: Planilha do movimento bidimensional com lançamento oblíquo e considerando força de atrito.



Fonte: O autor.

### Dicas para utilização da planilha:

A descrição que usamos para esse problema traz uma dificuldade para o Excel ou qualquer outro programa, que é a divisão por zero, e ao fazer  $b = 0$  o Excel acusa uma divisão por zero colocando #DIV/0! na célula em que isso ocorre. Para contornar isso recorreremos a função SE, por exemplo, para a posição  $x(t)$  na célula B8 colocamos  $\text{SE}(B2=0;C2+E2*A8;C2+A2*E2/B2*(1-\text{EXP}(-B2*A8/A2)))$ , ou seja, se  $b = 0$  então o cálculo na célula B8 será  $C2+E2*A8$  que é  $x(t) = x_0 + v_{x0}t$ , onde expandimos a exponencial na equação 2.12. Então “corrigindo”  $y(t)$ ,  $v_x(t)$  e  $v_y(t)$ , para  $b = 0$  a trajetória vermelha coincide com a azul. Além disso, para  $b \neq 0$  podemos examinar o tempo para a atingir o ponto mais alto da trajetória, o maior alcance horizontal e vertical.

### 2.5. MHS amortecido

Podemos aproveitar a seção anterior para explorar o caso da massa  $m$  estar presa a uma mola e oscilar na direção  $x$ , ou seja, sem levarmos em conta a força peso explicitamente, ela estará embutida na própria força de atrito. A segunda Lei de Newton nesse caso é semelhante à equação (2.10) onde trocamos a força peso pela força da mola sobre a massa, ou seja, a Lei de Hooke onde a força restauradora é proporcional à elongação da mola.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (2.15)$$

A solução da equação (4.1) é dada por,

$$x(t) = x_{max} e^{-\frac{bt}{m}} \cos(w't + \delta), \quad (2.16)$$

Onde  $x_{max}$  é a amplitude do movimento e a frequência  $w'$  é dada pela equação (2.17)

onde observamos que  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência do movimento sem amortecimento:

$$w' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (2.17)$$

A velocidade da massa é dada por:

$$v(t) = -x_{max} \left[ \frac{b}{m} \cos(w't + \delta) + w' \sin(w't + \delta) \right] e^{-\frac{bt}{m}}. \quad (2.18)$$

### Roteiro da planilha do MHS amortecido

- Temos quatro constantes,  $k$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $\delta$ , que podemos querer variar e precisamos de quatro botões para elas. Podemos incluir nessa parte  $w_0$  e  $w'$ , já que também são constantes apesar de serem calculadas e não dados de entrada, como representado na figura 2.10.

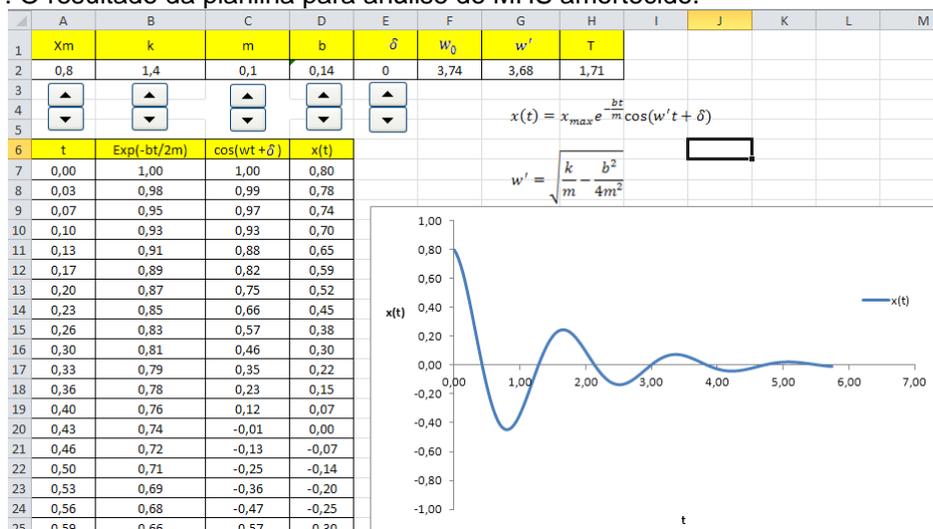
Figura 2.10: Constantes a serem usadas no MHS no caso amortecido e seus respectivos botões

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$X_m$	$k$	$m$	$b$	$\delta$	$w_0$	$w'$	$T$
2	0,8	1,4	0,1	0,14	0	3,74	3,68	1,71
3	▲	▲	▲	▲	▲			
4	▼	▼	▼	▼	▼			
5								

Fonte: O autor.

- Resta agora o cálculo de  $x(t)$ , para isso podemos usar quatro colunas dos termos envolvidos na equação (4.2), o resultado final da planilha é mostrado na figura 2.11:

Figura 2.11: O resultado da planilha para análise do MHS amortecido.



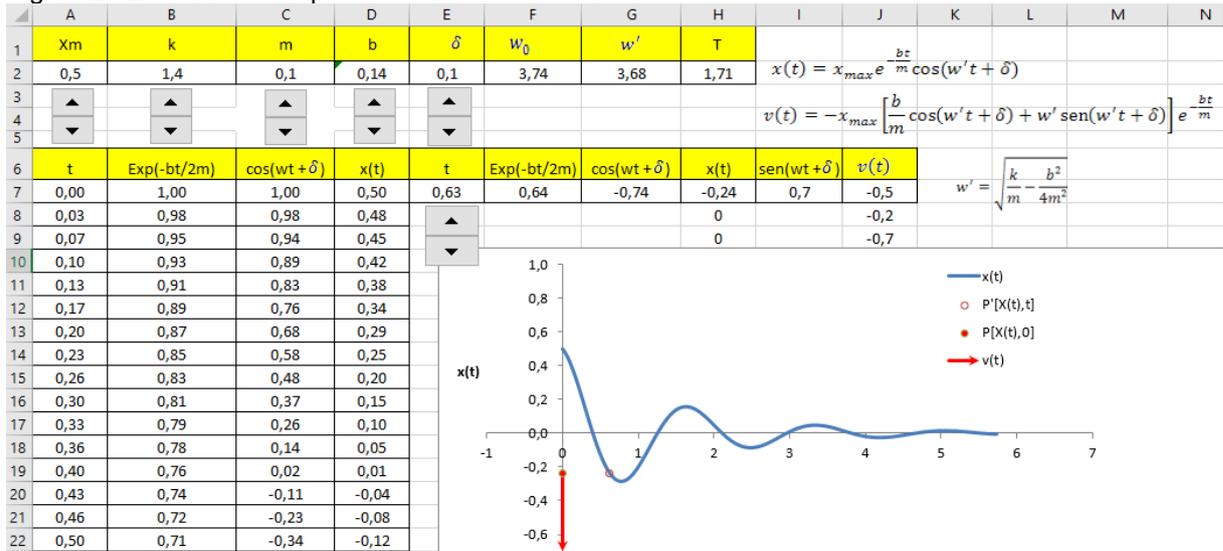
Fonte: O autor.

### Dicas para a utilização da planilha:

Com os botões fica evidente a influência das constantes  $k$ ,  $m$ ,  $b$ , ou seja, ao aumentar a constante da mola aumentamos a força de restauração da mola e o movimento tem uma frequência maior, ao aumentar a massa presa a mola acontece o contrário, pois aumentamos a resistência ao movimento, mas ao aumentar  $b$  a força de atrito aumenta e a amplitude do movimento diminui e sua frequência se altera muito pouco.

- Podemos acrescentar o comportamento dinâmico da massa  $m$  a esse gráfico, para isso, temos que inserir o tempo variável por um botão e calcular  $x(t)$  para esse instante de tempo, a velocidade dada pela equação (2.18) também pode ser colocada como um vetor. Geralmente há uma grande confusão na análise de gráficos de posição em função do tempo, onde imaginamos que o corpo segue a trajetória da curva mostrada. Podemos aproveitar esse exemplo para esclarecer o problema e mostrar a relação do movimento da massa no eixo  $x$  e sua imagem ao longo da curva  $x(t)$ . Para representar a trajetória do corpo usamos um ponto  $P(x(t), 0)$ , ou seja, se deslocando no próprio eixo vertical, e outro ponto  $P'(x(t), t)$  que será a imagem de  $P(x(t), 0)$  e se deslocará sobre a curva  $x(t)$ . Assim, podemos visualizar a relação entre a posição da massa  $m$  sobre sua trajetória e a posição de sua imagem em relação ao tempo. O resultado final desta planilha é mostrado na figura 2.12.

Figura 2.12: Planilha completa do MHS amortecido.

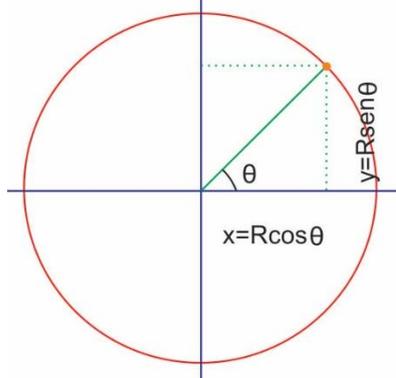


Fonte: O autor.

### 2.6. Movimento Circular Uniforme (MCU)

Podemos usar a figura 2.13 para analisar o MCU onde a circunferência vermelha representa a trajetória da massa  $m$  (círculo azul),  $R$  é o raio da circunferência.

Figura 2.13: Esquema para analisar o Movimento Circular Uniforme.



Fonte: O autor.

O movimento é uniforme então a velocidade angular  $w$  é constante no tempo e é definida como:

$$w \equiv \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.19}$$

Podemos escrever também,

$$\theta = wt + \delta, \tag{2.20}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o raio  $R(t)$  da circunferência no tempo  $t$  e o eixo  $x$ , e  $\delta$  é uma constante de fase.

Da figura 2.13 percebemos que as coordenadas da massa  $m$  são dadas pelas equações (2.21) e (2.22).

$$x(t) = R \cos(\omega t + \delta), \quad (2.21)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \delta). \quad (2.22)$$

As componentes da velocidade são obtidas pelas derivadas,

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -R\omega \cdot \sin(\omega t + \delta), \quad (2.23)$$

e

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = R\omega \cdot \cos(\omega t + \delta), \quad (2.24)$$

A velocidade tem módulo então  $v = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} = R\omega$ .

Do mesmo modo as componentes da aceleração:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta), \quad (2.25)$$

e

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta). \quad (2.26)$$

Com módulo  $a = R\omega^2$  ou  $a = \frac{v^2}{R}$ .

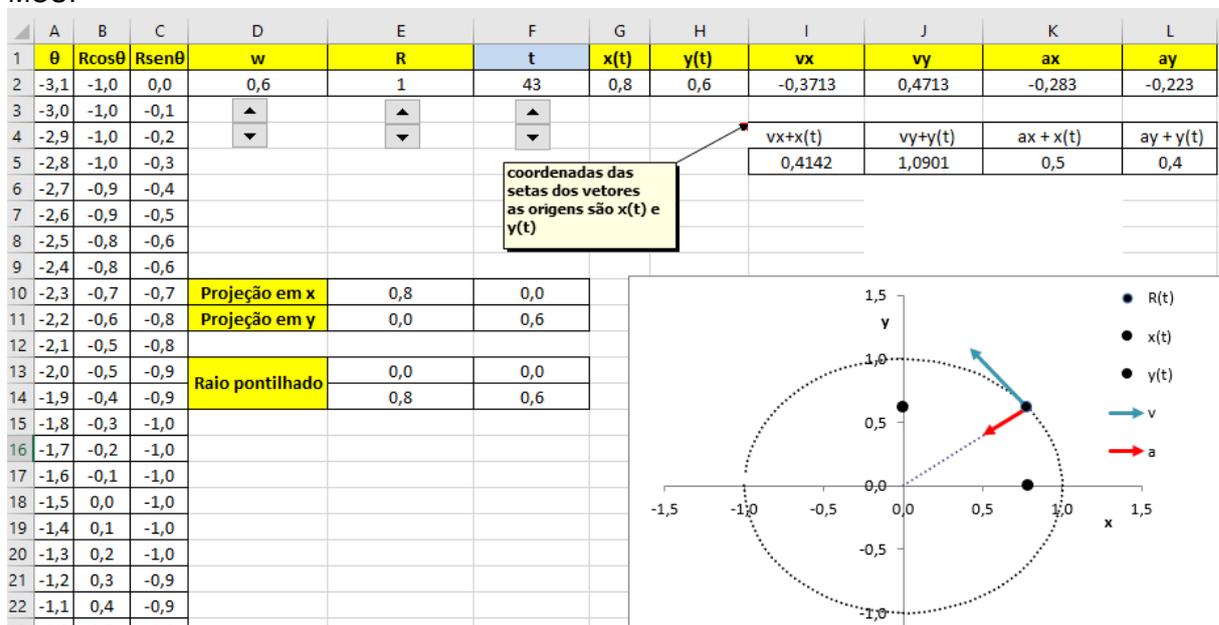
### Roteiro para a planilha

- Inicialmente para referência construiremos a circunferência que será a trajetória da massa  $m$ , isso pode ser feito usando três colunas, uma para varrer o ângulo  $\theta$  de  $-\pi$  a  $\pi$  e outras duas para calcular a projeção do raio  $R$  nas direções  $x$  e  $y$ , ou seja,  $x = R \cos \theta$  e  $y = R \sin \theta$ . Assim temos as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos sobre a circunferência.
- Temos ainda duas constantes para controlar via botões,  $\omega$  e  $R$ , além do tempo  $t$  que se pretende variar via botão.
- Agora falta calcular  $x(t), y(t), v_x(t), v_y(t), a_x(t)$  e  $a_y(t)$  com as equações anteriores.
- Vale observar que para inserirmos os vetores no gráfico vamos precisar deslocá-los para a posição da massa, então a origem dos vetores será a

posição da massa e a extremidade (seta) será dada pelas somas  $vx(t) + x(t)$ ,  $vy(t) + y(t)$ ,  $ax(t) + x(t)$  e  $ay(t) + y(t)$ .

- Podemos querer analisar o movimento da massa nas direções  $x$  e  $y$ , ou seja, as projeções do movimento. Então criamos dois pontos que se deslocam pelos eixos  $x$  e  $y$  com coordenadas  $(x(t), 0)$  e outro com  $(0, y(t))$ .
- É interessante mostrar no gráfico o deslocamento do raio  $R(t)$  e escolhemos uma linha pontilhada entre a massa e a origem do gráfico. O resultado final é mostrado na figura 2.14.

Figura 2.14: Planilha mostrando a velocidade, aceleração, e projeções da posição da massa para o MCU.



Fonte: O autor.

## 2.7. Campo Gravitacional

Outro exemplo de aplicação da Segunda Lei de Newton é o da força gravitacional, a expressão que vamos usar para esta força é a seguinte:

$$v\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (2.27)$$

onde  $\vec{F}_{12}$  é o vetor força gravitacional que a massa  $m_1$  faz sobre a massa  $m_2$ ,  $r_{12}$  é a distância entre a massa  $m_1$  e a massa  $m_2$  e  $\hat{r}_{12}$  é o vetor unitário que aponta da massa  $m_1$  para a massa  $m_2$ . O sinal negativo na equação (2.27) diz que o sentido do vetor força é o inverso de  $\hat{r}_{12}$  ou seja, aponta de  $m_2$  para  $m_1$  mostrando que a força é atrativa. A Força que a massa  $m_2$  faz na massa  $m_1$  é igual a  $-\vec{F}_{12}$ . Podemos pensar

na força gravitacional  $\vec{F}_{12}$  como sendo devida a um campo gravitacional  $\vec{G}_1$ , gerado pela massa  $m_1$  e agindo na massa  $m_2$ , a expressão para a força nesses termos fica,

$$\vec{F}_{12} = \vec{G}_1 m_2, \quad (2.28)$$

onde,

$$\vec{G}_1 = -G \frac{m_1}{r^2} \hat{r}, \quad (2.29)$$

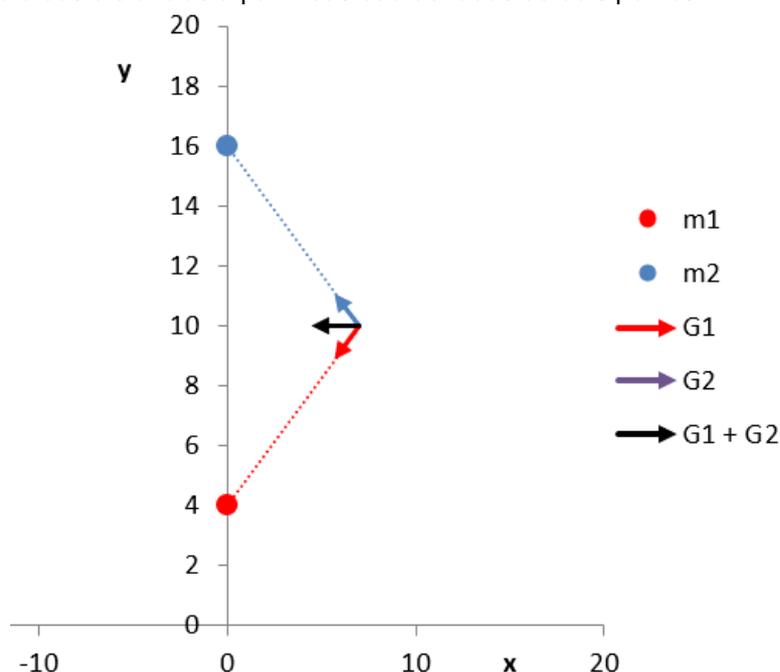
e o significado de  $\hat{r}$  agora é o de um vetor unitário que aponta da massa  $m_1$  para um ponto localizado a uma distância  $r$  da massa. Se nesse ponto for colocada uma massa  $m_2$ , a força que agirá sobre  $m_2$  devido a presença da massa  $m_1$  será dada pela equação (2.28).

Vamos ver agora alguns exemplos de planilhas para esta força.

#### Massas fixas e seus campos gravitacionais num ponto móvel:

- Temos que ter botões para as constantes  $m_1$ ,  $m_2$ , e para variar a posição do ponto P onde vamos analisar os vetores do campo gravitacional. Nesse exemplo vamos usar a constante gravitacional como igual a 1.
- A distância da massa  $m_1$  até o ponto P no plano  $xy$  pode ser obtida a partir das posições da massa e do ponto, ou seja,  $r = \sqrt{(x_p - x_{m1})^2 + (y_p - y_{m1})^2}$  como mostrado na figura 2.15.

Figura 2.15: Cálculo das distâncias a partir das coordenadas de dois pontos.



Fonte: O autor.

- A componente  $x$  do campo  $\vec{G}_1$  também fica em função das posições, lembrando que o cosseno do ângulo nesse caso será,

$$\frac{(x_P - x_{m1})}{r} = \frac{(x_P - x_{m1})}{\sqrt{(x_P - x_{m1})^2 + (y_P - y_{m1})^2}} \quad (2.30)$$

Com isso o campo na direção  $x$  fica:

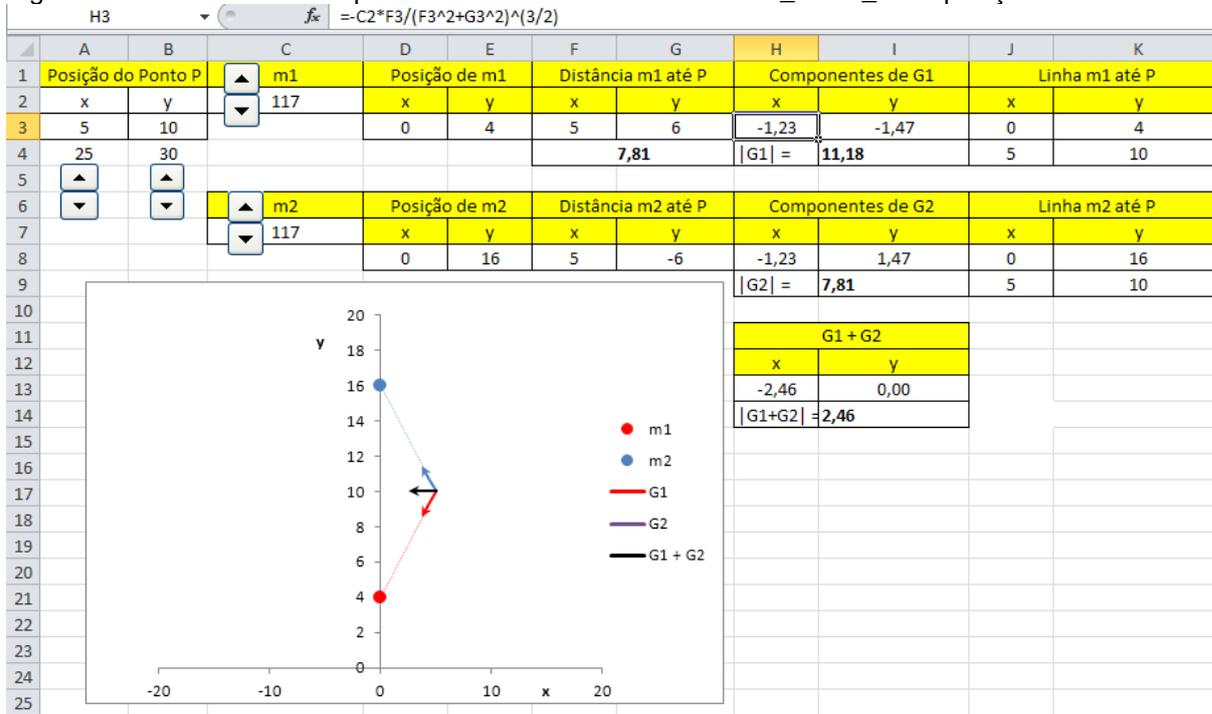
$$G_{1x} = -\frac{(x_P - x_{m1})}{[(x_P - x_{m1})^2 + (y_P - y_{m1})^2]^{3/2}} \quad (2.31)$$

E o mesmo raciocínio se aplica à componente  $y$  e também para a massa  $m_2$ .

- Temos agora então que calcular o campo gravitacional resultante, ou seja, a soma  $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$  tendo as componentes  $G_x = G_{1x} + G_{2x}$  e  $G_y = G_{1y} + G_{2y}$ .
- É interessante calcular também o módulo desses vetores.
- Para que se perceba que a direção dos campos  $\vec{G}_1$  e  $\vec{G}_2$  está sobre a linha que une o ponto P e as massas, é interessante traçar essas linhas.

O resultado da planilha é mostrado na figura 2.16.

Figura 2.16: Planilha do Campo Gravital de duas massas  $m_1$  e  $m_2$  em posições fixas.



Fonte: O autor.

### Dicas para a utilização da planilha:

Com os valores apresentados na figura 2.16 podemos variar a posição  $x$  do ponto onde o campo gravitacional é analisado, curioso é notar que o campo cresce

com o aumento de  $x$  até um certo ponto e a partir daí começa a diminuir! Até esse “certo ponto” temos então um campo que cresce com a distância até as massas, enquanto que estamos acostumados com o contrário. Esse é um bom momento para explorar a competição entre termos numa expressão matemática, ou seja, entre o cosseno do ângulo (2.30) e o quadrado da distância, ao nos afastarmos das massas o cosseno aumenta e a distância também, inicialmente o cosseno aumenta mais rápido que o quadrado da distância, mas o cosseno só pode aumentar até o valor 1, enquanto que a distância não tem limite.

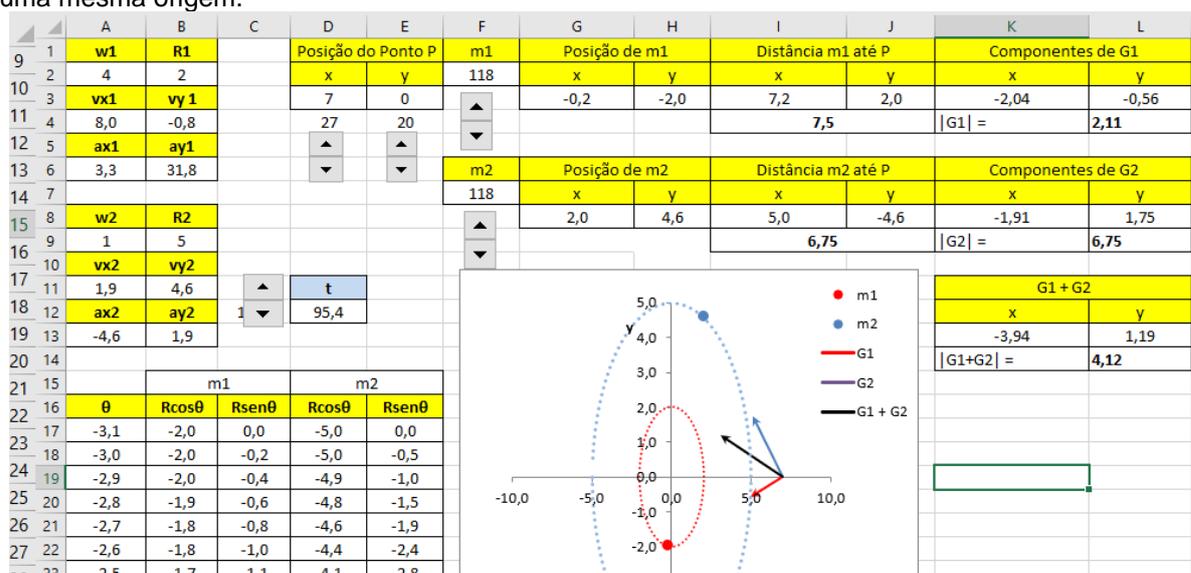
## 2.8. Força Gravitacional e MCU.

Podemos agora analisar os campos em um ponto devido a uma massa que gira numa órbita circular, ou duas massas que giram em torno de um centro comum. Estamos pensando aqui que as velocidades são muito menores que a da luz e que podemos usar a expressão dada pela equação (2.27) para estes campos, também que as massas não interagem a ponto de interferir no movimento uma da outra.

- Na mesma planilha anterior copiamos da planilha do MCU a parte necessária para gerar as posições das massas, ou seja, as frequências  $w_1$  e  $w_2$  e os raios  $R_1$  e  $R_2$ , o tempo e seu botão também deve ser copiados.
- Podemos traçar as circunferências para cada raio.

O resultado é mostrado na figura 2.17.

Figura 2.17: Campos gravitacionais no plano de um sistema de duas massas que giram em torno de uma mesma origem.



Fonte: O autor.

## 2.9. Onda Circular

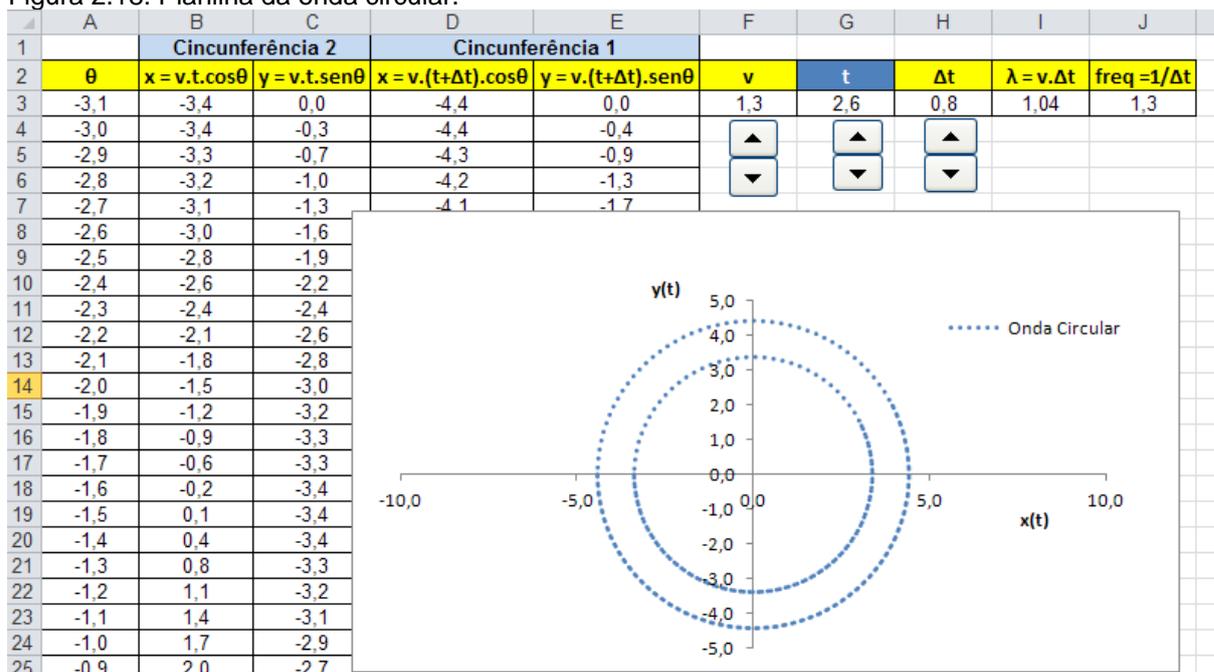
Vamos imaginar agora uma bola batendo na superfície da água numa piscina com uma frequência constante, a primeira perturbação na água se propaga em todas as direções com uma velocidade  $v$ . Dali a um intervalo de tempo  $\Delta t$  (período) outra perturbação da bola sobre a água é gerada e a distância de separação dessas duas perturbações (frentes de onda) é o comprimento de onda  $\lambda = v\Delta t$ . Se nos posicionarmos em um ponto fixo e contarmos quantas frentes de onda passam por ali por segundo, o número que resultará é a frequência que percebemos, ou seja,  $f = 1/\Delta t$ , ou, a cada  $\Delta t$  passa uma (1) frente de onda (ou um  $\lambda$ ).

Caracterizamos a onda com  $\lambda$ ,  $v$ ,  $f$  e podemos agora construir a planilha para o estudo dessa onda.

- Precisamos criar pelo menos duas circunferências concêntricas, esta tarefa já foi realizada nas planilhas do MCU (seção 2.6) e da Força Gravitacional (seção 2.7). Mas agora o raio dessas circunferências deve variar com o tempo, ou seja, a primeira circunferência a ser criada tem o raio  $R(t + \Delta t) = v(t + \Delta t)$  e a segunda  $R(t) = vt$ .
- Precisamos também de botões para variar as constantes  $v$  e  $\Delta t$ , outro para variar o tempo  $t$ . A frequência  $f$ , o comprimento de onda  $\lambda$  serão calculados.

O resultado da planilha está mostrado na figura 2.18.

Figura 2.18: Planilha da onda circular.



Fonte: O autor.

Dicas para a utilização da planilha:

Com o valor do tempo em zero começamos a clicar no botão que controla o tempo, a primeira frente de ondas circular vai evoluir e um comprimento de onda depois a segunda frente de ondas aparece, temos aí a visualização do que vem a ser o comprimento de onda. Poderíamos reforçar essa sensação colocando mais frentes de ondas.

### 2.10. Ondas planas monocromáticas progressivas

Fisicamente as ondas planas seriam constituídas de frentes de onda com formato de um plano infinito, ou seja, um plano que se estende até o infinito e que carrega em todos os pontos desse plano um único valor de campo, por exemplo, elétrico. Os planos de igual valor de campo são separados um do outro pelo comprimento de onda. No caso das ondas eletromagnéticas temos que depois do plano com valores de campo nulo, crescem planos de valores de campos negativos, para esses casos conseguimos uma forma semelhante usando a função seno, ou a cosseno, em função da posição no espaço. Mas, para que a onda seja progressiva essa função também tem que depender do tempo, representamos o valor do campo num desses planos por  $y(x, t)$ . A onda se desloca para a direita no eixo  $x$  com o passar do tempo se usarmos:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t). \quad (2.32)$$

Ou para a esquerda se usarmos,

$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t). \quad (2.33)$$

Nessas equações  $A$  é a amplitude da onda, ou seja, como o maior valor do seno é um  $(\pm 1)$ , o maior valor de  $y(x, t)$  é  $\pm A$ . O número de onda  $k$  é relacionado ao comprimento de onda por  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , ou seja, quantos comprimentos  $\lambda$  (quantas frentes de onda) cabem em  $2\pi$ ,  $x$  é a posição espacial onde a amplitude da onda está sendo avaliada no tempo  $t$ ,  $\omega$  é a frequência angular que se relaciona com a frequência  $f$  em Hertz por  $\omega = 2\pi f$ . Observe que  $y(x, t)$  é a mesma para todos os valores das coordenadas  $y$  e  $z$ , ou seja, em todos os pontos do plano infinito que corta o eixo  $x$  o valor de  $y(x, t)$  é o mesmo e é dado pelas equações (2.32) ou (2.33).

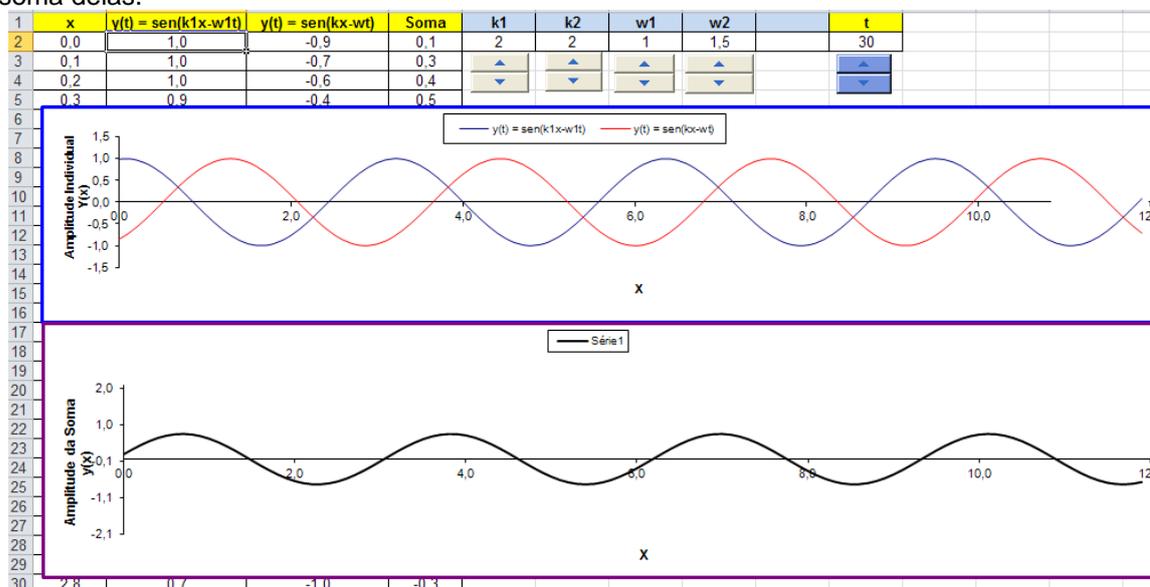
Podemos agora construir a planilha para duas ondas dessas ondas.

Temos as expressões  $y_1(x, t) = \text{sen}(k_1x - w_1t)$  e  $y_2(x, t) = \text{sen}(k_2x - w_2t)$  para traçar as curvas no gráfico, então temos que ter as constantes  $k_1$ ,  $w_1$ ,  $k_2$ ,  $w_2$ , e seus respectivos botões. Como as funções são de  $x$  e de  $t$  temos que decidir qual iremos variar no gráfico, ou seja, teremos que construir duas planilhas.

### 2.10.1. Variando o tempo

- Criamos uma coluna varrendo  $x$  e calculamos respectivamente  $y_1(x, t^*)$  e  $y_2(x, t^*)$  para um único tempo que iremos variar com um botão. Então teremos um gráfico de  $y(x, t^*)$  com os valores de posição  $x$  no eixo horizontal, onde  $t^*$  é um valor dado pelo botão de tempo. Veja que podemos fazer outro gráfico somando estas ondas ponto a ponto como na figura 2.19.

Figura 2.19: Planilha de ondas planas monocromáticas progressivas, em cima duas ondas e em baixo a soma delas.



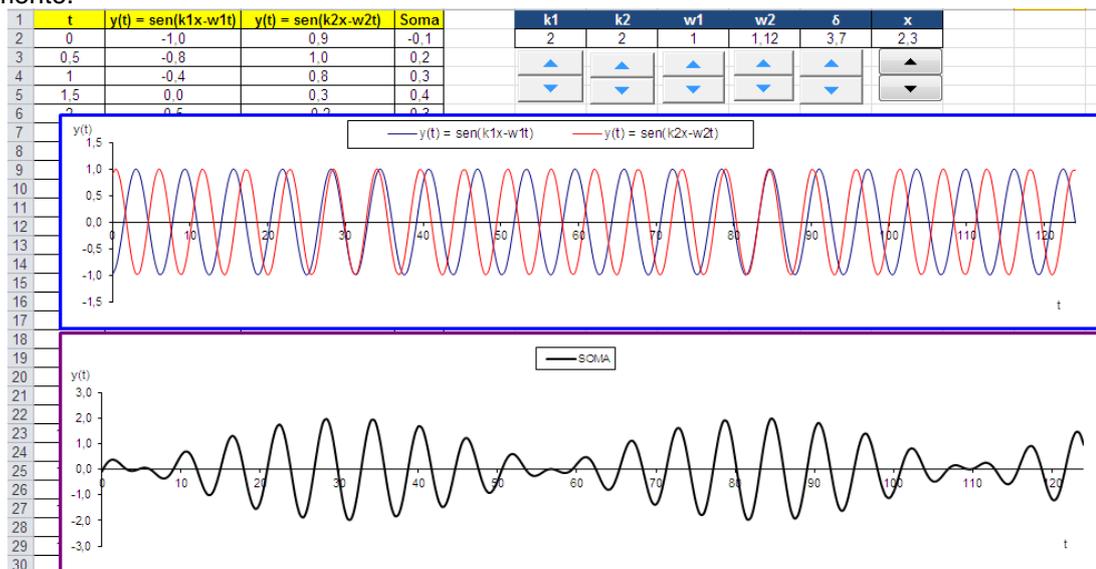
Fonte: O autor.

### 2.10.2. Variando a posição

- Criamos uma coluna varrendo o tempo  $t$  e calculamos respectivamente  $y_1(x^*, t)$  e  $y_2(x^*, t)$  para um único valor de  $x$  que iremos variar com um botão. Então teremos um gráfico de  $y(x^*, t)$  com os valores de tempo  $t$  no eixo horizontal, onde  $x^*$  é um valor dado pelo botão de posição, ver figura 2.20.

Em ambos os casos é possível visualizar no graficamente o fenômeno de batimento, ou seja, ondas com frequências próximas e existindo na mesma região se superpõem construtivamente em alguns pontos e em outros destrutivamente (como o som produzido por duas cordas de violão ligeiramente desafinadas).

Figura 2.20: Em cima duas ondas com frequências próximas, em baixo a soma delas evidenciando o batimento.



Fonte: O autor.

### 2.11. Velocidade de fase

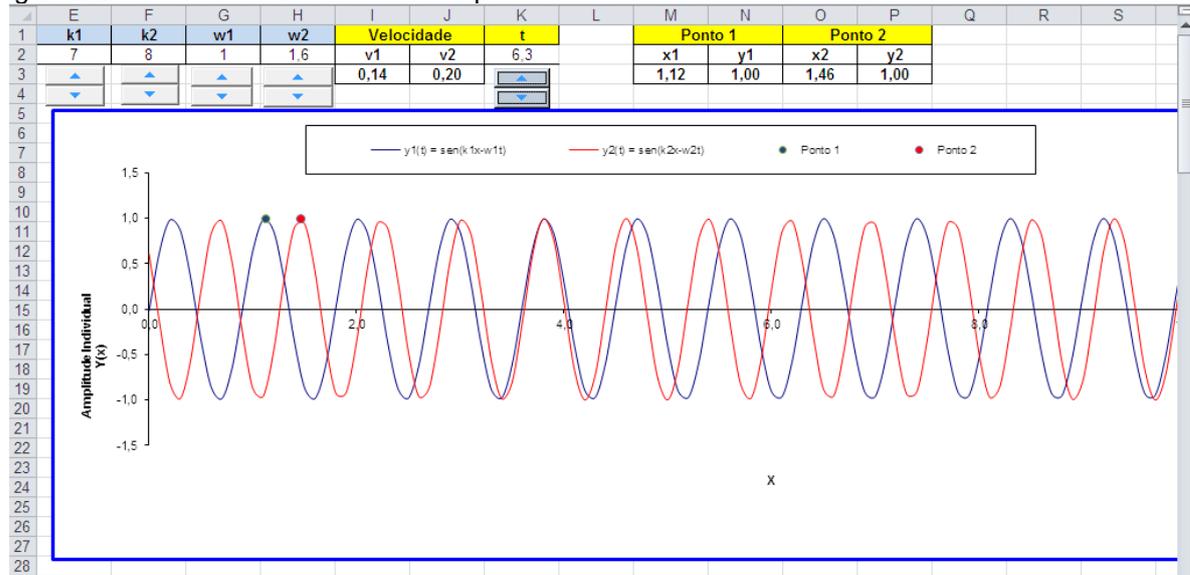
A velocidade com que um valor fixo de  $y(x)$  se desloca com o tempo pode ser obtido fazendo  $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0$ . Tomando a derivada com relação ao tempo da expressão na equação (2.32) temos  $\cos(kx - wt) = 0$ , ou seja, a fase da onda  $kx - wt$  pode assumir os valores  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  assim, a equação para a posição de um ponto que zera a derivada  $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$  é dada pela equação (2.24),

$$x = \frac{1}{k} \left( wt + \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right). \quad (2.34)$$

Essa equação nos dá a posição de todos os pontos que estão na “crista” da onda. A velocidade com que estes pontos se deslocam no tempo é então dada por

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{k}.$$

Podemos aproveitar as planilhas anteriores para testar e visualizar este resultado, criamos um ponto para cada onda que se deslocam com velocidades  $v_1 = \frac{w_1}{k_1}$  e  $v_2 = \frac{w_2}{k_2}$  e obedecem as equações  $x_1 = w_1 t + \frac{\pi}{2}$  e  $x_2 = w_2 t + \frac{\pi}{2}$ . O resultado é mostrado na figura 2.21.

Figura 2.21: Pontos 1 e 2 testando as expressões de velocidades das ondas  $v=w/k$ 

Fonte: O autor.

## 2.12. Velocidade de grupo

Agora queremos analisar a onda resultante da soma das duas ondas tratadas na seção 9.2. A condição que devemos analisar então muda um pouco, termos  $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$  onde agora  $Y(x, t) = \text{sen}(k_1x - w_1t) + \text{sen}(k_2x - w_2t)$ . Como no caso anterior  $k_1 \cos(k_1x - w_1t) + k_2 \cos(k_2x - w_2t) = 0$ , mas agora considerando arbitrários  $k_1, k_2, w_1, w_2$  a solução para qualquer posição  $x$  e qualquer tempo  $t$  exige que as fases anulem independentemente os cossenos, ou seja,  $k_1x - w_1t = k_2x - w_2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  e com isso  $k_1x - w_1t = k_2x - w_2t$ , obtemos então a equação (2.35) para a posição como função do tempo.

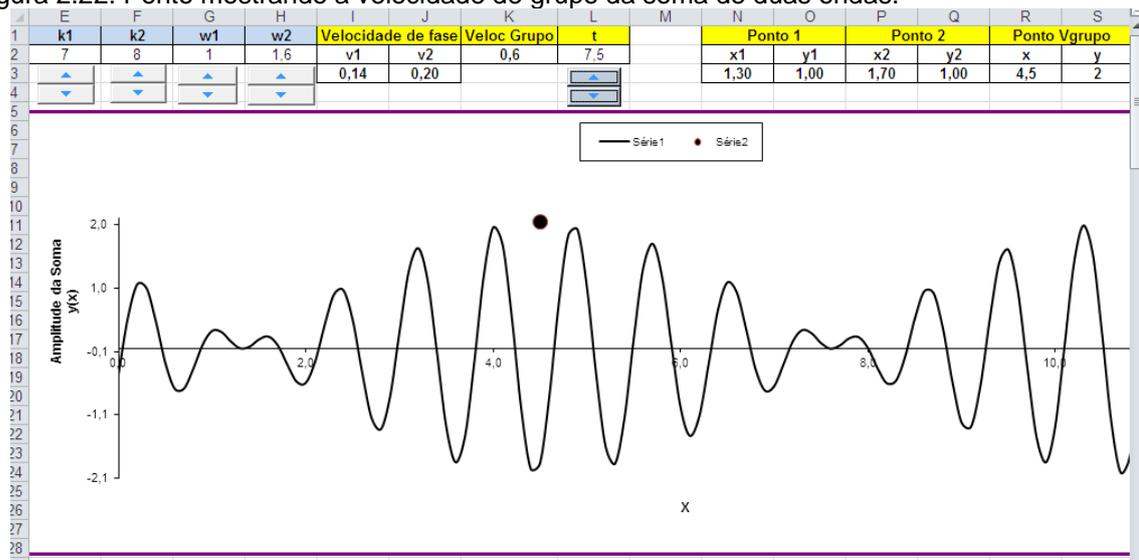
$$x = \frac{w_2 - w_1}{k_2 - k_1} t. \quad (2.35)$$

Com a velocidade de grupo então dada por,

$$v_g = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{w_2 - w_1}{k_2 - k_1}. \quad (2.18)$$

Como no caso anterior colocaremos um ponto se movendo com a velocidade de grupo dada pela equação (2.36) no gráfico da soma das duas ondas, a planilha construída é mostrada na figura 2.22.

Figura 2.22: Ponto mostrando a velocidade de grupo da soma de duas ondas.



Fonte: O autor.

#### Dicas de utilização da planilha:

Colocando a curva do gráfico da figura 2.22 no gráfico da figura 2.21 dá para perceber como e onde as ondas interferem construtivamente e destrutivamente com o passar do tempo. Também é interessante testar  $k_1 \neq k_2$  e  $k_1 = k_2$ .

## Capítulo 3 - Ótica

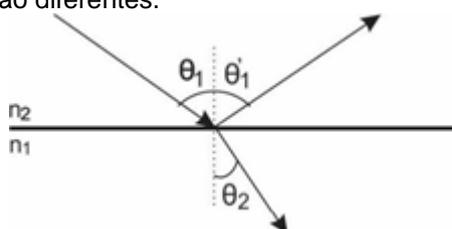
### 3.1. Introdução

O estudo da ótica, assim como a mecânica, também exige muita abstração, ainda mais quando a luz pode ser tratada como uma onda eletromagnética e em alguns casos como um raio ou feixe que se propaga em linha reta. No caso dos fenômenos de reflexão e de refração em interfaces que separam dois meios de índices de refração diferentes, podemos usar a luz como um feixe que se propaga em linha reta e que obedecem a lei de Snell. Nesses casos existem os ângulos nos quais os feixes interagem com a interface e que irão ajudar a definir matematicamente as retas pelas quais os feixes seguem. No caso dos fenômenos de interferência e difração teremos que tratar a luz como onda eletromagnética, podemos descrever essas ondas matematicamente de maneira simplificada e mesmo assim é exigido uma boa abstração do problema, pois essas ondas são formadas por vetores que representam os campos elétricos e magnéticos e que variam no tempo e no espaço. Então, como no capítulo de mecânica, o uso de botões e vetores nos ajudarão a visualizar algumas situações com tempo ou posição variáveis no estudo da ótica.

### 3.2. Reflexão e refração

A figura 3.1 nos ajuda a visualizar dois meios que refratam (desviam) a luz de maneiras distintas e por isso são rotulados com índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ . Assim que um raio de luz partindo do meio com  $n_1$  com velocidade  $v_1$  incide sobre a superfície de separação com o segundo meio, de índice de refração  $n_2$  onde a velocidade do feixe agora é  $v_2$ , ele se separa em dois raios, um que é o raio refletido pela superfície e outro que é o raio refratado pela superfície. O raio refletido permanece no primeiro meio, sendo conduzido em um ângulo  $\theta'_1$  com a linha normal a superfície que é igual ao ângulo  $\theta_1$  do raio incidente. Mas, o raio refratado atravessa para o segundo meio e seu desvio da linha normal a superfície depende da razão entre os índices de refração e do ângulo de incidência.

Figura 3.1: Esquema dos raios de luz, incidente, refletido e refratado na superfície de separação entre dois meios de índices de refração diferentes.



Fonte: O autor.

A reflexão então é regida pela igualdade entre os ângulos de incidência e de reflexão, ou seja:

$$\theta'_1 = \theta_1. \quad (3.1)$$

Por outro lado, a refração obedece a relação conhecida como Lei de Snell:

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2, \quad (3.2)$$

onde  $n_1 = \frac{c}{v_1}$  e  $n_2 = \frac{c}{v_2}$ ,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

Com essas informações podemos agora construir a planilha para o estudo da reflexão e da refração.

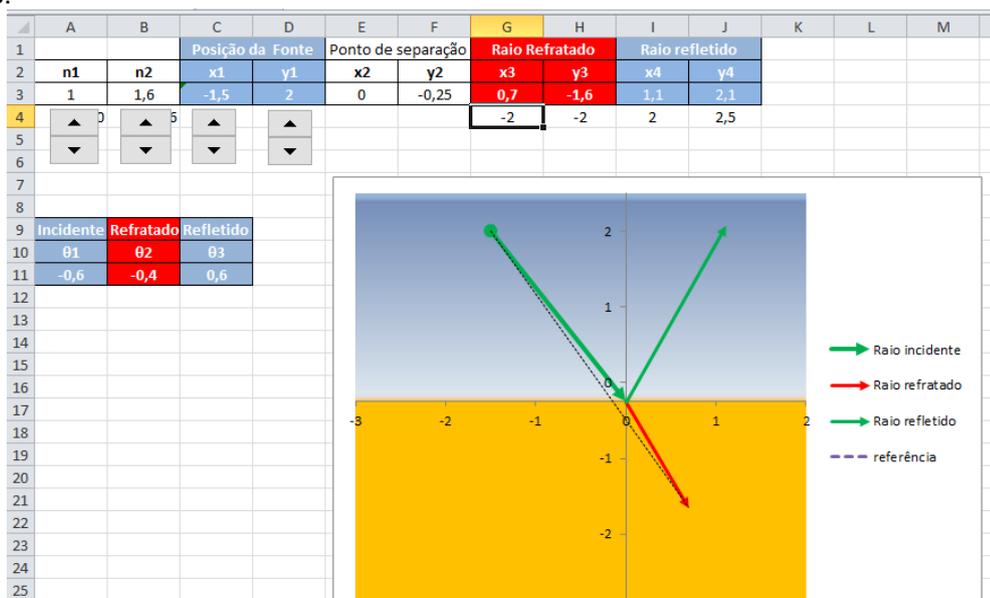
#### Roteiro para a Reflexão e refração.

- Podemos usar três vetores para representar os raios de luz, com a intensão de lhes atribuir sentido e direção somente, o módulo é a distância da origem do vetor até um ponto de observação. Com isso necessitaremos controlar a posição de seis pontos, dois para cada vetor, ou seja, um para a extremidade inicial e outro para a extremidade final de cada um. Como três desses pontos estão no mesmo lugar, ou seja, onde o raio incidente toca a superfície de separação dos meios, precisaremos de somente quatro pontos, as três extremidades dos vetores e o ponto de separação (comum).
- Podemos desejar variar os índices de refração de cada meio e então serão necessários dois botões para isso. É interessante usar botões para variar o ângulo de incidência e podemos fazer isso variando a posição da extremidade inicial do vetor que representa o raio incidente.
- Para testar se os vetores estão respeitando as relações das pelas equações 3.1 e 3.2 podemos usar uma linha tracejada ligando a extremidade inicial do raio incidente com a extremidade final do raio refratado, ou seja, quando  $n_1 = n_2$  não deve haver desvio.
- Um recurso que podemos usar é o preenchimento gradiente de cores do gráfico, a parte de cima pode ficar com uma cor e a de baixo com outra.
- Devemos calcular os ângulos dos três raios com a linha normal a superfície de separação, por exemplo, na célula A11 para o ângulo de incidência temos a operação  $\text{ATAN}((C3-E3)/(D3-F3))$ .
- Os números que aparecem na quarta linha da planilha apresentada na figura 3.2 ajudam a escolher a extremidade dos raios refletido e refratado, por

exemplo, na célula F3 temos a operação  $(H4-F3)*\text{COS}(B11)$  que representa a componente “x” do vetor “raio refratado”. O termo  $(H4-F3)$  serve para ajustar a origem do raio refratado e, portanto, a linha de separação a separação de cores usadas no formato gradiente.

A planilha que resulta destes passos é mostrada na figura 3.2.

Figura 3.2: Planilha para o estudo da reflexão e da refração, mostrando o raio incidente, o refletido e o refratado.



Fonte: O autor.

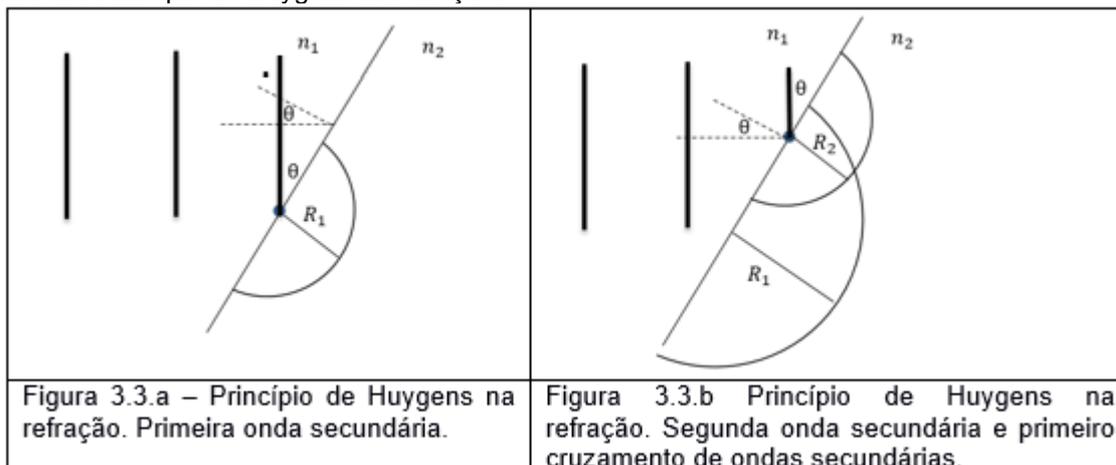
### Dicas de utilização da planilha:

O comportamento dos raios quando  $n_1 > n_2$  apresenta um ângulo crítico  $\theta_c$  de incidência para que o raio refratado exista, acima desse ângulo ele não existe. Pela equação 3.2 podemos calcular o ângulo crítico  $\theta_c = \text{asen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  onde fizemos  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ . Diminuindo o valor de  $y_1$  na planilha, aumentamos o valor de  $\theta_1$ , podemos usar isso para aproximar  $\theta_1$  do valor do ângulo crítico. No momento em que o ângulo crítico for ultrapassado o Excel retorna para  $\theta_2$  o valor #NÚM!.

### 3.3. Princípio de Huygens e a refração

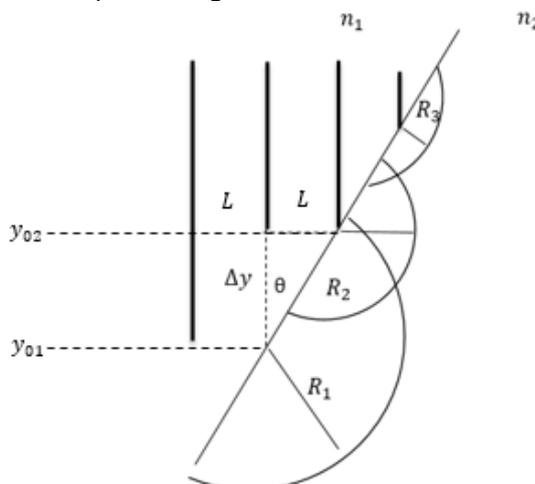
O Princípio de Huygens diz que *cada ponto da frente de onda se comporta como uma fonte puntiforme, gerando ondas secundárias*. Então podemos pensar na seção anterior, ou seja, num feixe de luz tipo laser, com um único comprimento de onda  $\lambda$ , chegando numa interface de separação entre dois meios com índices de refração diferentes, e cada ponto da interface onde o laser incide produzindo ondas esféricas, como mostrado nas figuras 3.3.a e 3.3.b.

Figura 3.3: Princípio de Huygens na refração.



Fonte: O autor.

Podemos analisar dois pontos da interface que irão emitir as ondas secundárias, veremos que é o necessário para obtermos duas circunferências e a reta tangente a elas cuja inclinação respeitará a lei de Snell. Consideremos esses pontos na interface e separados pela distância  $\Delta y$ . Vemos que a primeira onda é formada na parte inferior da interface como na figura 3.3.a, numa posição que chamaremos de  $y_{01}$ , então num intervalo de tempo  $\Delta t$  ela viaja com velocidade  $v_2$  (meio de  $n_2$ ) uma distância  $R_1$  formando uma circunferência de raio  $R_1 = v_2 \Delta t$ . Consideremos agora o intervalo de tempo  $\Delta t_1$ , onde a mesma frente de onda viaja com a velocidade  $v_1$  no meio com  $n_1$  até a interface, mas numa posição mais acima da anterior  $y_{02} = y_{01} + \Delta y$ , e a partir daí viaja no meio com  $n_2$  com velocidade  $v_2$  num intervalo de tempo  $\Delta t_2$  gerando uma segunda onda secundária de raio  $R_2 = v_2 \Delta t_2$ . Notemos que,  $\Delta t_2 + \Delta t_1 = \Delta t$ , ou seja,  $\Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_1$  e que  $\Delta t_1 = \frac{\Delta y \operatorname{tg} \theta}{v_1}$ , pois  $L = \frac{v_1}{\Delta t_1}$  como podemos observar na figura 3.4.

Figura 3.4: Três ondas secundárias para o ângulo de incidência  $\Theta$ 

Fonte: O autor.

Com isso, num intervalo de tempo  $\Delta t$  temos:

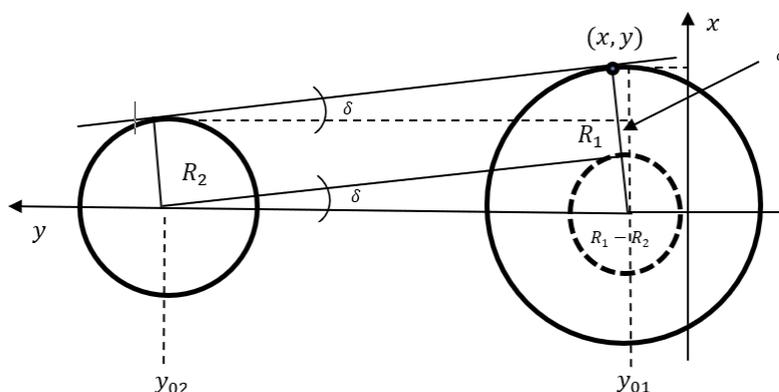
$$R_2 = R_1 \left( 1 - \frac{\Delta y \operatorname{tg} \theta}{v_1 \Delta t} \right), \quad (3.3)$$

e da mesma forma,

$$R_3 = R_1 \left( 1 - \frac{2\Delta y \operatorname{tg} \theta}{v_1 \Delta t} \right). \quad (3.4)$$

A direção normal a reta tangente aos arcos de circunferências, ou as circunferências, nos dá então a direção de propagação da nova frente de onda composta agora pelas ondas secundárias, consideremos a figura 3.5,

Figura 3.5: Esquema para o cálculo da reta tangente a duas circunferências.



Fonte: O autor.

O ângulo do feixe refratado com a normal a interface entre os meios (o eixo  $x$ ) é  $\delta$  e obtemos:

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{R_1 - R_2}{y_{01} + \frac{\Delta y}{\operatorname{cos} \theta} - y_{01}} = \frac{R_1 - R_2}{\frac{\Delta y}{\operatorname{cos} \theta}}, \quad (3.5)$$

que é a Lei de Snell,

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{v_2}{v_1} \operatorname{sen} \theta. \quad (3.6)$$

Assim, o ângulo entre a direção de propagação da frente de onda com a normal (eixo  $x$ ) é dado por:

$$\delta = \operatorname{arcsen} \left( \frac{R_1 - R_2}{\frac{\Delta y}{\operatorname{cos} \theta}} \right). \quad (3.7)$$

As coordenadas do ponto  $(x, y)$  da reta tangente a primeira circunferência mostrada na figura 3.5 são dadas por:

$$y = y_{01} + R_1 \text{sen} \delta, \quad (3.8)$$

$$x = R_1 \text{cos} \delta. \quad (3.9)$$

Estamos prontos então para construir a planilha para esse caso.

Vamos inicialmente definir os valores de velocidade do feixe de luz em cada meio e a velocidade da luz no vácuo  $c$  (escolhemos  $c = 1$ ) para calcular mais tarde os índices de refração (células A1, B1, C1).

- Temos que controlar o intervalo de tempo  $\Delta t$  com um botão.
- Consideraremos as três fontes de ondas secundárias posicionadas no eixo  $y$ , separadas por  $\Delta y$  como  $y_{01}, y_{02}, y_{03}$ . Precisaremos de um botão para alterar  $\Delta y$ .
- O ângulo do feixe incidente com a normal a interface chamaremos de  $\theta$ , entraremos com o valor em graus e o transformaremos em radianos para usar as funções da planilha.
- Com a informação do ângulo de incidência e a  $\text{tg} \theta$  precisamos gerar dois pontos e construir o segmento de reta que representara o feixe incidente. Podemos fixar o ponto de incidência na posição  $y_{01}$ .
- Agora vamos criar os pontos que representarão as posições geradoras das ondas secundárias (células M2, N2, O2, P2, Q2, R2).
- Para traçar os arcos de circunferências precisamos calcular seus raios  $R_1, R_2, R_3$  usando a equação  $R_1 = v_2 \Delta t$ , e também (3.3) e (3.4). Estes raios dependem do intervalo de tempo  $\Delta t$ . Com o mesmo procedimento da secção 2.6 do Capítulo 2 traçamos os arcos de circunferência para cada raio. **Lembrando** que as posições no eixo  $y$  para os centros das circunferências devem estar separados por  $\frac{\Delta y}{\text{cos} \theta}$ .
- Podemos agora calcular a reta tangente aos arcos de circunferência e usar a normal a esta reta como direção de propagação do feixe refratado.
- Para visualizar a inclinação do feixe incidente, podemos traçar um segmento de reta, perpendicular à frente de onda incidente, terminando no ponto  $(0, y_{01})$ . Para visualizar a inclinação do feixe refratado usamos outro segmento de reta, saindo desse mesmo ponto e perpendicular a reta que tangencia os arcos de circunferência.

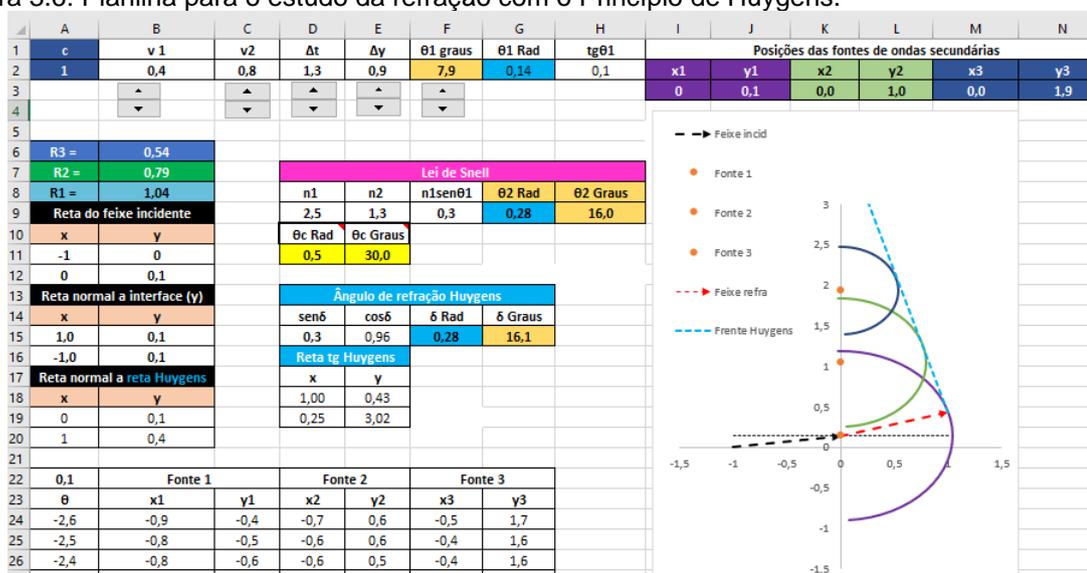
- Também podemos usar a Lei de Snell para calcular a direção do feixe refratado e comparar com o valor dado pela equação (3.7).
- Se o feixe viajar de um meio de índice de refração maior para um de índice menor existe um ângulo de incidência crítico  $\theta_c$  no qual o feixe refratado deixa de existir, ou seja,  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  e pela equação (3.2),

$$\frac{n_1}{n_2} \text{sen}\theta_c = \text{sen}\theta_2 = 1, \quad (3.10)$$

$$\theta_c = \text{arcsen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \quad (3.11)$$

A planilha para esse exercício é mostrada nas figuras 3.6:

Figura 3.6: Planilha para o estudo da refração com o Princípio de Huygens.



Fonte: O autor.

### Dicas de utilização da planilha:

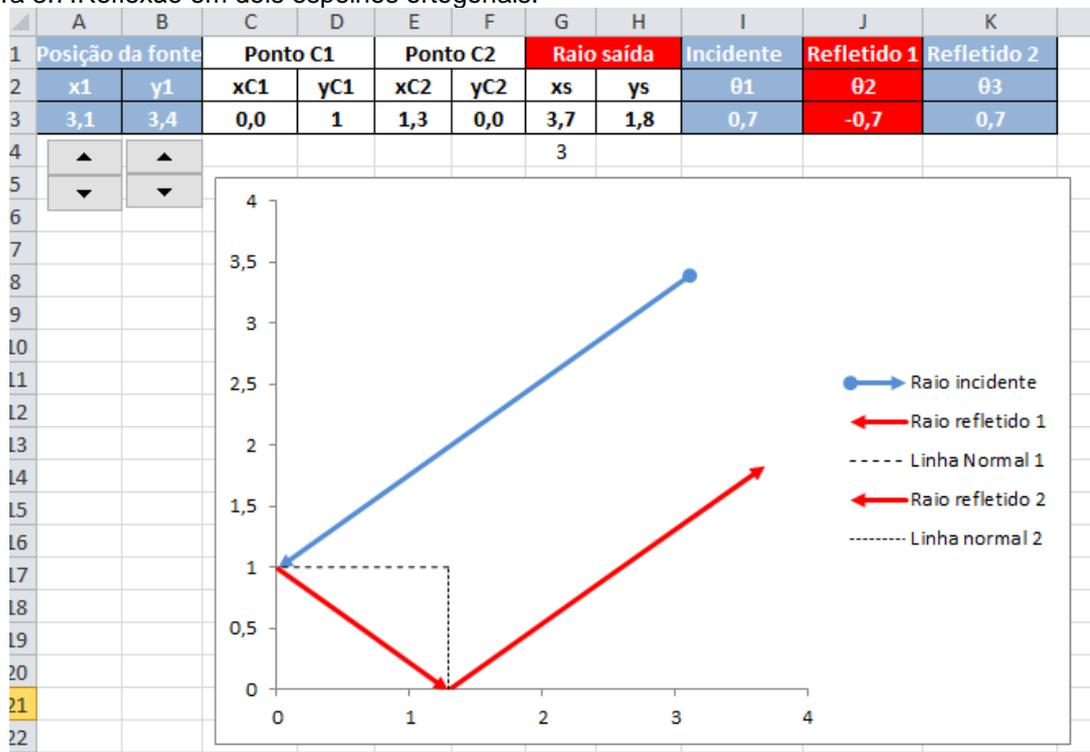
Use o botão que controla a célula D2, ou seja, o tempo, começando do zero, você perceberá que as circunferências do Princípio de Huygens irão se formar. No entanto, enquanto não houver o cruzamento entre elas, alguns valores da planilha não serão calculados e o Excel irá colocar #NÚM!. Para eles. Compare os valores das células H9 e G5 onde são calculados os ângulos de refração, H9 pela Lei de Snell e G5 pela reta tangente as circunferências (Princípio de Huygens). Você pode fazer esta comparação primeiro para  $v_2 > v_1$  e depois para  $v_2 < v_1$ , num desses casos você observará a reflexão interna total e o que acontece com os nós.

### 3.4. Reflexão em dois espelhos planos ortogonais

- A regra a ser obedecida é a dada pela equação 3.1, ou seja, o ângulo de reflexão formado com a linha normal à superfície refletora é igual ao ângulo de incidência. Consideraremos um raio que parte do objeto (fonte) e atinge o espelho num ponto fixo, mas a posição do objeto poderemos variar por botões.
- Teremos três raios, um incidente, um refletido no primeiro espelho (eixo y) e um refletido no segundo espelho (eixo x). Com isso, teremos dois pontos comuns, um para o encontro do raio incidente com o raio refletido no primeiro espelho e outro para o encontro do primeiro raio refletido com o segundo raio refletido (raio de saída dos espelhos).
- Os ângulos de incidência e de reflexão podem ser observados na figura 3.7 e podem ser calculados pelas regras  $\text{ATAN}((B3-D3)/(A3-C3))$ ,  $\text{ATAN}((D3-F3)/(C3-E3))$ ,  $\text{ATAN}((H3-F3)/(G3-E3))$ .
- Para observar os ângulos de incidência e de reflexão criamos duas linhas de referência, a linha normal ao primeiro espelho e a linha normal ao segundo espelho. As coordenadas dos pontos inicial e final da primeira linha são  $(x_{C1}, y_{C1})$  e  $(x_{C2}, y_{C1})$ , e para a segunda linha  $(x_{C2}, y_{C2})$  e  $(x_{C2}, y_{C1})$  (ver figura 3.7).

A planilha para este caso é mostrada na figura 3.6.

Figura 3.7: Reflexão em dois espelhos ortogonais.

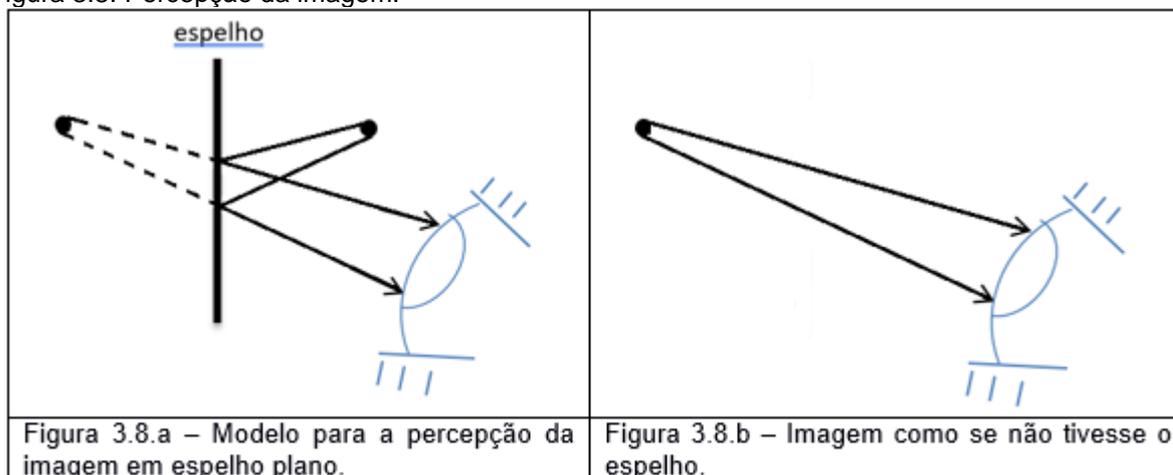


Fonte: O autor.

### 3.5. Formação de imagens nos espelhos planos

A luz que vem de cada ponto de um objeto colocado a frente do espelho é refletida na superfície espelhada, como a luz diverge de cada ponto vinda do objeto ela atinge todos os pontos do espelho e é refletida em todas as direções, por isso é possível enxergar a imagem refletida do objeto em todas as posições (exceto atrás do objeto) relativas ao espelho. Na figura 3.8-a é mostrado dois raios que saem das extremidades do objeto e são refletidos no espelho, eles delimitam uma região do espelho que ao saírem em direção ao olho vão atingir a extensão do olho que pode perceber luz, fora dessa região os raios não passam pelo cristalino e não podem alcançar a retina onde a imagem é formada. Assim todos os raios intermediários a estes dois e que incidem na região do espelho delimitada por eles farão parte da imagem projetada na retina. A imagem do objeto mostrado na figura 3.8.a é então percebida como se estivesse no prolongamento dos raios refletidos, ou seja, como na figura 3.8.b. A imagem está numa posição aparente atrás do espelho e numa distância ( $i$ ) igual à do objeto ao espelho ( $p$ ), para distâncias de imagens virtuais adotamos o sinal negativo e para imagens reais o sinal positivo, podemos escrever então  $p = -i$ .

Figura 3.8: Percepção da imagem.



Fonte: O autor.

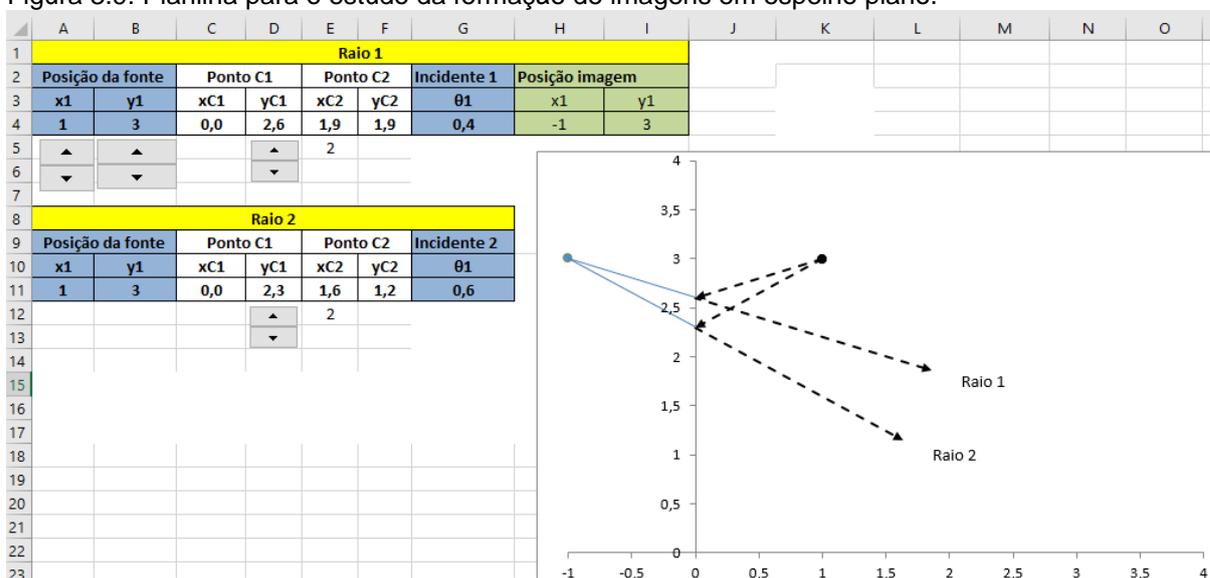
Podemos agora construir a planilha para essas situações.

- Necessitaremos de botões para variar a posição do objeto que será representado por um ponto.
- Trabalharemos com dois raios saindo do objeto, portanto teremos dois pontos de contato com o espelho (C1) e dois pontos onde os raios serão observados (C2).
- Temos que unir o ponto do objeto com os pontos C1 e criar os raios incidentes que atingem o espelho.

- Como o espelho estará sobre o eixo  $y$ , ou seja, na posição  $x = 0$ , podemos variar as posições dos pontos C1 com um único botão para cada raio, alterando somente a posição  $y$  dos pontos C1.
- Para construir os raios refletidos, segmento de reta que une os pontos C1 e C2, será necessário calcular os ângulos de reflexão  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , por exemplo, para o caso da planilha mostrada na figura 3.9  $\theta_1 = \text{ATAN}((B4-D4)/(A4-C4))$ .
- Vamos precisar da posição da imagem para traçar o prolongamento dos raios refletidos lembrando que  $p = -i$ .

O resultado da construção dessa planilha é mostrado na figura 3.9.

Figura 3.9: Planilha para o estudo da formação de imagens em espelho plano.

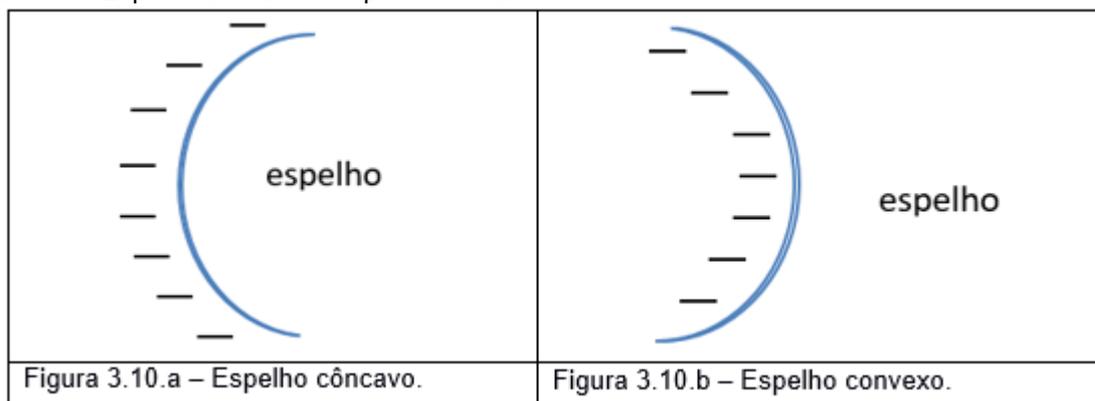


Fonte: O autor.

### 3.6. Espelhos esféricos

Um espelho esférico é constituído de uma superfície refletora com formato esférico, um hemisfério. A superfície refletora pode ser interna ou externa ao hemisfério, no caso de ser interna o espelho é dito côncavo, externa é dito convexo. No espelho côncavo os raios podem convergir ou divergir dependendo da posição do objeto em relação ao espelho, já no espelho convexo eles somente podem divergir independentemente da posição relativa do objeto. Analisaremos a formação de imagens para o espelho côncavo. As imagens e situações para o espelho convexo são conseguidas multiplicando por  $-1$  a coordenada  $x$  do objeto, objeto e imagem trocam de lado no espelho.

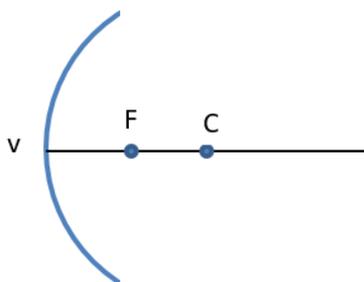
Figura 3.10: Espelho côncavo e espelho convexo.



Fonte: O autor.

Um espelho côncavo possui alguns pontos especiais para análise das imagens formadas por reflexão, o primeiro é o centro de curvatura  $C$  como mostra a figura 3.11, já que o espelho é um “pedaço” de uma esfera este ponto é o centro da esfera da qual o espelho é uma parte. O segundo é o vértice  $v$ , ou centro do espelho que juntamente com o centro de curvatura define o eixo central do espelho, ou seja, a reta que passa por estes dois pontos. O terceiro é o ponto focal  $F$  ou foco do espelho que se localiza sobre o eixo do espelho na metade da distância entre o centro de curvatura e o vértice.

Figura 3.11: Espelho côncavo.



Fonte: O autor.

Quando temos raios vindos de um objeto localizado em  $p$  sobre o eixo central, mas desviados de pequenos ângulos em relação ao eixo central do espelho, podemos usar a equação (3.12) para determinar a posição da imagem  $i$ :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}, \quad (3.12)$$

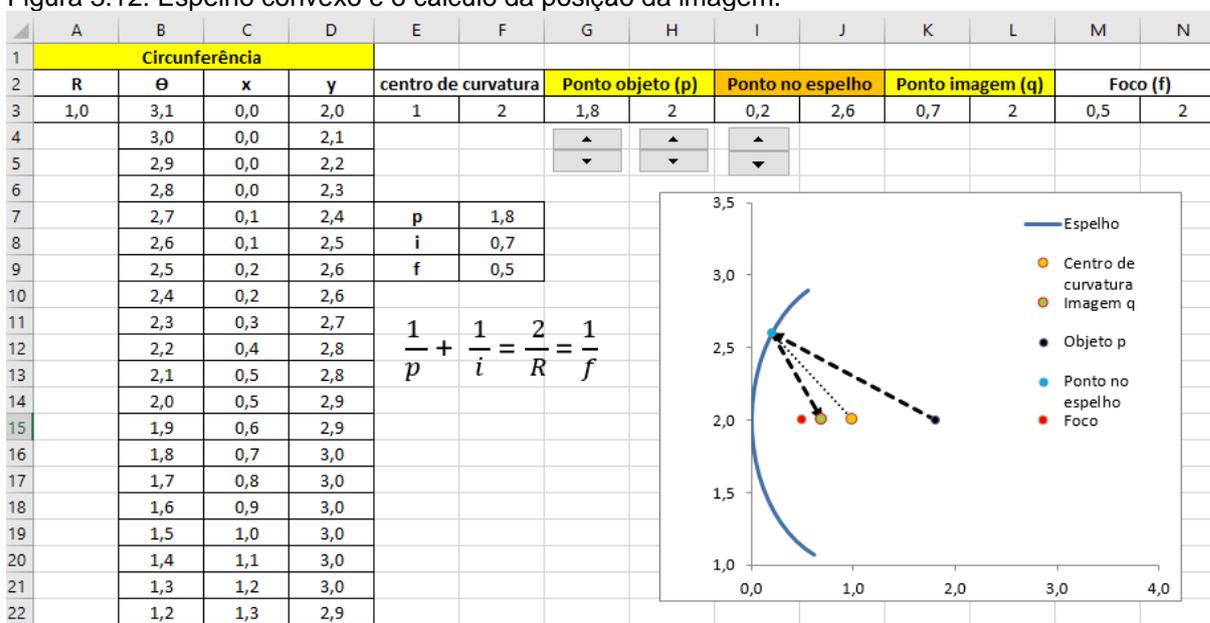
onde  $f = \frac{R}{2}$  é o foco do espelho e  $R$  o raio de curvatura do espelho, ou raio da esfera que o espelho faz parte.

Podemos nesse momento fazer a primeira planilha para os espelhos côncavos e simular a equação (3.12).

- Para construir o hemisfério do espelho podemos fazer o mesmo procedimento da secção 2.6.
- Precisamos guardar os valores do centro de curvatura, do ponto objeto que é a localização do objeto, do ponto no espelho onde o raio vai incidir e do foco.
- Agora podemos calcular a localização da imagem via equação (3.12).
- Será interessante poder varia, via botões, a posição do objeto e também do ponto onde o raio da esfera encontra o espelho e nesse caso podemos usar a equação da circunferência  $y = \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2} - y_c$  onde  $(x_c, y_c)$  são as coordenadas do centro de curvatura e  $x$  um valor escolhido por um botão.

O resultado dessa planilha está na figura 3.12.

Figura 3.12: Espelho convexo e o cálculo da posição da imagem.



Fonte: O autor.

### Dicas de utilização da planilha mostrada na figura 3.12:

Como o objeto não tem dimensão de altura, escolha a posição y do ponto objeto (H3) igual a posição y do centro de curvatura (F3). Você pode agora testar o caso em que a posição do objeto no infinito (uma posição muito maior que o raio do espelho) forma uma imagem no foco do espelho, aumentando o valor da célula G3. Agora você pode ir diminuindo a distância do objeto até o espelho, veja o que acontece quando o ponto objeto está sobre o centro de curvatura, o raio deve voltar sobre ele mesmo. Agora aproxime mais um pouco o objeto do espelho atingindo o foco, o Excel informa que uma divisão por zero ocorreu colocando #DIV/0! na célula F8, quando uma divisão por zero ocorre o Excel coloca o ponto na origem e devemos considerar

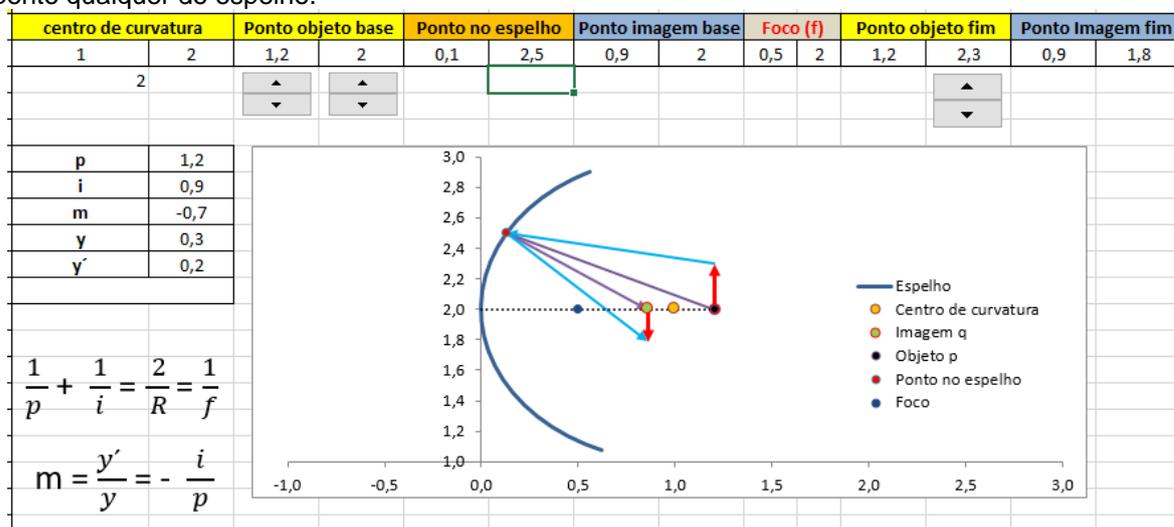
a imagem no infinito. E entre o vértice do espelho e o foco a imagem estaria do outro lado do espelho, ou seja, é virtual, isso até que se atinja o vértice do espelho onde a imagem deve se formar também.

Agora analisemos o caso de um objeto com extensão vertical:

- Para analisar o tamanho da imagem formada precisamos da ampliação, cuja expressão matemática é  $m = \frac{y'}{y} = -\frac{i}{p}$  onde  $y'$  e  $y$  são as alturas da imagem e do objeto respectivamente. Para evitar a divisão por zero quando sabemos o resultado, colocamos a função SE(F7=0;1;-F8/F7) na célula F9 que calcula o valor de  $m$ , é o caso quando  $p = 0$ .
- Agora vamos representar o objeto por um vetor, pois como veremos a imagem pode ter orientação diferente do objeto. O objeto possui extensão vertical e precisamos de um ponto para representar o topo (fim do vetor) e outro para a base. A imagem será outro vetor e também será necessário dois pontos para representá-la.
- Vamos precisar de botões para variar a posição do objeto, também a posição de incidência do raio que vem do fim do vetor que representa o objeto, e a posição do raio que vem da base do objeto. Estes dois pontos vão delimitar os outros raios.

Na figura 3.13 é mostrado a planilha para o caso em que unimos os pontos da extremidade do objeto com a extremidade da imagem, ou seja, fim do objeto com fim da imagem e base com base. Foi omitido a parte que gera o hemisfério do espelho por economia de espaço na figura, mas é a mesma da figura 3.12.

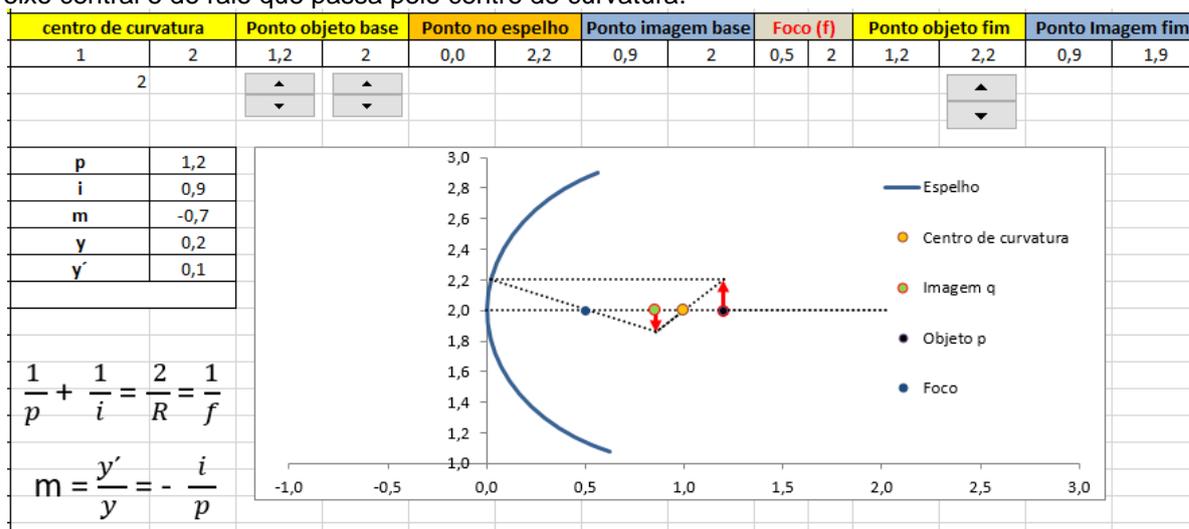
Figura 3.13: Formação de imagem no espelho côncavo para o caso de incidência dos raios em um ponto qualquer do espelho.



Fonte: O autor.

Na figura 3.14 é mostrado a planilha para o caso em que traçamos um raio que sai do fim (topo) do vetor que representa o objeto, viaja paralelo ao eixo central e se reflete passando pelo foco do espelho. O outro raio sai do mesmo lugar, ou seja, do topo do objeto e passa pelo centro de curvatura e se reflete sobre ele mesmo. A posição onde esses dois raios se cruzam coincide com a posição do topo da imagem.

Figura 3.14: Formação de imagem no espelho côncavo para o caso de incidência do raio paralelo ao eixo central e do raio que passa pelo centro de curvatura.



Fonte: O autor.

#### Dicas de utilização da planilha mostrada na figura 3.13 e 3.14:

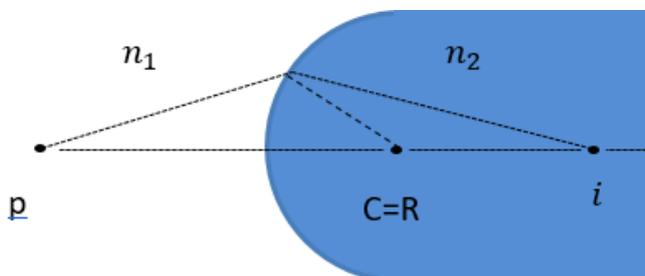
Novamente para um objeto no infinito ( $p \gg R$ ) a imagem deve se formar no foco, no entanto o tamanho da imagem tende a zero! Sobre o centro de curvatura a imagem é invertida e tem o mesmo tamanho que o objeto. Entre o centro de curvatura e o foco a imagem continua invertida, mas agora ela é maior que o objeto. No foco a imagem se forma no infinito causando as divisões por zero. Entre o foco e o vértice do espelho a imagem é virtual, direita e maior que o objeto diminuindo de tamanho até que o objeto esteja no vértice onde o tamanho da imagem é igual ao do objeto.

### 3.7. Refração em superfícies esféricas

Podemos agora analisar como ficaria o caso da seção 3.2 para uma superfície de separação esférica entre dois meios com índices de refração diferentes, ver figura 3.15. Novamente, para raios incidentes que formem um ângulo pequeno com o eixo central, temos uma equação que relaciona a distância da imagem ao vértice de separação dos dois meios com a distância do objeto a este vértice. Esta relação vai depender, como era de se esperar, dos índices de refração dos meios envolvidos.

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (3.13)$$

Figura 3.15: Formação de imagem em superfície esférica e com meios de índices de refração diferentes.



Fonte: O autor.

Temos nesse caso dois focos, um quando o raio vai do meio com  $n_1$  para o meio com  $n_2$  e o outro quando ocorre o contrário:

$$\frac{n_2}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \text{ para } |p| \rightarrow \infty \text{ e } R > 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{n_1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R} \text{ para } i \rightarrow -\infty \text{ e } R < 0 \quad (3.15)$$

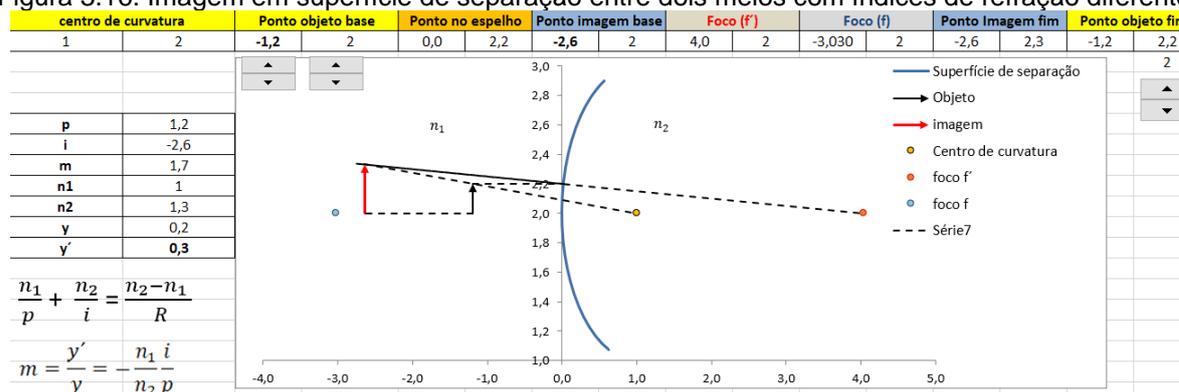
No caso de imagens extensas temos a ampliação lateral dada por:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 i}{n_2 p}. \quad (3.16)$$

Podemos agora começar a construção de planilhas para este caso, o que muda em relação aos espelhos é o cálculo da posição da imagem uma vez dada a posição do objeto e a existência de dois focos diferentes, um para cada índice de refração. Temos que considerar na equação (3.16) que quando o objeto está do lado esquerdo no caso da figura 3.15 implica que  $p > 0$  e que quando está do lado direito da superfície de separação  $p < 0$ , no entanto estaremos usando a posição  $x = 0$  como a localização do vértice, a posição do objeto terá coordenada  $x$  negativa do lado esquerdo do vértice.

As planilhas anteriores podem ser aproveitadas e acrescentamos os dois focos  $f'$  e  $f$ , o resultado é mostrado na figura 3.16.

Figura 3.16: Imagem em superfície de separação entre dois meios com índices de refração diferentes.



Fonte: O autor.

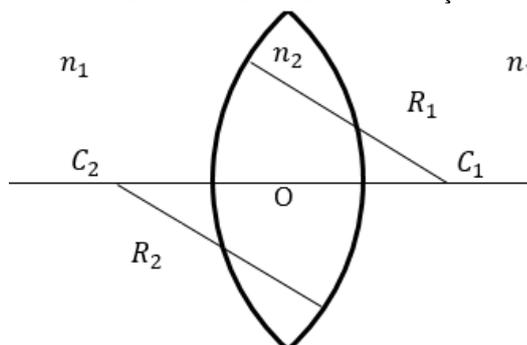
### Dicas de utilização da planilha:

Podemos começar com o objeto indo para o infinito negativo ( $|p| \gg |f|$ ), a imagem invertida tende a se formar no foco  $f'$  com tamanho zero. No foco e ir aproximando do foco  $f$  temos uma imagem no infinito, direita e virtual. Entre  $f$  e o vértice existe a posição em que a imagem se encontra em  $f$ , para esse caso  $i = -f$  e  $p = \frac{n_1^2 R}{n_2^2 - n_1^2}$ . No vértice a imagem é igual ao objeto e podemos evitar a divisão por zero colocando na célula F9 para o valor de  $m$  a função  $SE(F7=0;1;-(F10/F11)*(F8/F7))$  que atribui a  $m$  o valor 1, já que pela equação 3.13  $i = 0$  para  $p = 0$ . A planilha também serve para a posição do objeto com valores positivos (localização positiva), mas temos que lembrar que para os cálculos temos que considerar  $p < 0$ , um caso a ser observado é a posição do objeto em  $x = R$  ( $p = -R$ ) que implica em  $i = R$  e a imagem é direita e menor que o objeto. Com o objeto em  $f'$ , ou seja,  $p = -f'$  temos a imagem direita e menor que o objeto com  $i = \frac{n_2^2 R}{n_2^2 - n_1^2}$ .

### 3.8. Lentes Delgadas

São consideradas lentes delgadas quando a maior espessura da lente é menor que as distâncias focais, raios de curvatura, distância do objeto e distância da imagem. Examinaremos agora a lente biconvexa mostrada na figura 3.17.

Figura 3.17: Lente biconvexa imersa num meio de índice de refração  $n_1$ .



Fonte: O autor.

As distâncias do objeto  $p$ , da imagem  $i$ , dos dois centros de curvatura  $C_1$  e  $C_2$  dos dois focos  $f_1$  e  $f_2$  a serem consideradas são medidas em relação a origem O. A equação que relaciona a distância do objeto com a da imagem é a equação (3.17), conhecida como equação dos construtores de lentes, que depende dos índices de refração do meio ( $n_1$ ) em que a lente está imersa e do índice de refração do material da lente ( $n_2$ ). Também temos que considerar a convenção  $R_2 < 0$  e  $R_1 > 0$ .

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = (n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2}. \quad (3.17)$$

Na equação (3.17) o índice relativo  $n_{21} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}$ .

A ampliação lateral  $m$  é a razão entre a altura da imagem  $y'$  pela altura do objeto  $y$  e é dada pela equação (3.18):

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{i}{p}. \quad (3.18)$$

- Para a construção da planilha lembramos que os hemisférios das lentes podem ser obtidos fazendo o mesmo procedimento da secção 2.6, considerando um raio do hemisfério positivo e outro negativo, o que pode ser visualizado na figura 2.15 onde selecionamos alguns pontos das duas circunferências para o gráfico.
- Nesse exemplo a origem da lente não está obrigatoriamente na origem do sistema de coordenadas (0,0), isso exige que usemos um valor de distância do objeto e da imagem para o cálculo usando a equação (3.17) e outros valores para plotar o objeto e a imagem no gráfico. Por exemplo, na figura 2.15 podemos perceber que a distância do objeto assume os valores -2,7 e 7,2, ou seja, o primeiro valor é o que será usado para localizar o objeto no gráfico e o segundo valor (7,2) é o que deve ser usado na equação (3.17) como a distância até a origem O para obter o valor  $i = 6,2$ . Entretanto, esse valor de  $i$  é a

distância a partir da origem, ou seja, para colocarmos a imagem no gráfico temos que somar 4,5 que é a posição da origem da lente no gráfico.

- Para encontrar a origem da lente podemos usar a figura 3.18, onde percebemos que  $O = C_1 - x_1$  e que,

$$x_1 + x_2 = C_1 - C_2, \quad (3.19)$$

e, também que,

$$R_1^2 - x_1^2 = R_2^2 - x_2^2. \quad (3.20)$$

Lembremos que agora  $R_2$  é somente a hipotenusa de um triângulo retângulo e deve ser considerado positivo, a equação (3.20) pode ser escrita como:

$$R_2^2 - R_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1), \quad (3.21)$$

ou,

$$\frac{R_2^2 - R_1^2}{C_1 - C_2} = x_2 - x_1, \quad (3.22)$$

e agora usando (3.19) em (3.22) obtemos:

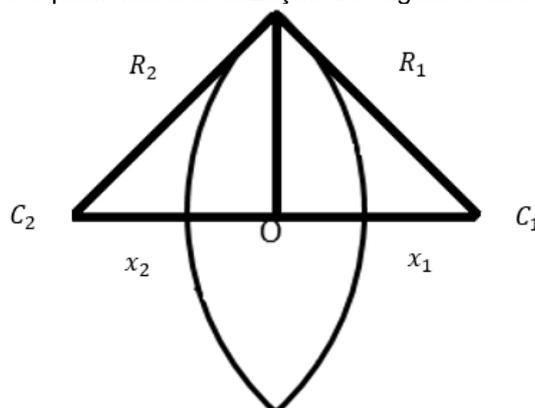
$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2 - (R_2 - R_1)^2}{(C_1 - C_2)}. \quad (3.23)$$

Finalmente obtemos a localização da origem da lente:

$$O = C_1 - \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2 - (R_2 - R_1)^2}{(C_1 - C_2)}. \quad (3.24)$$

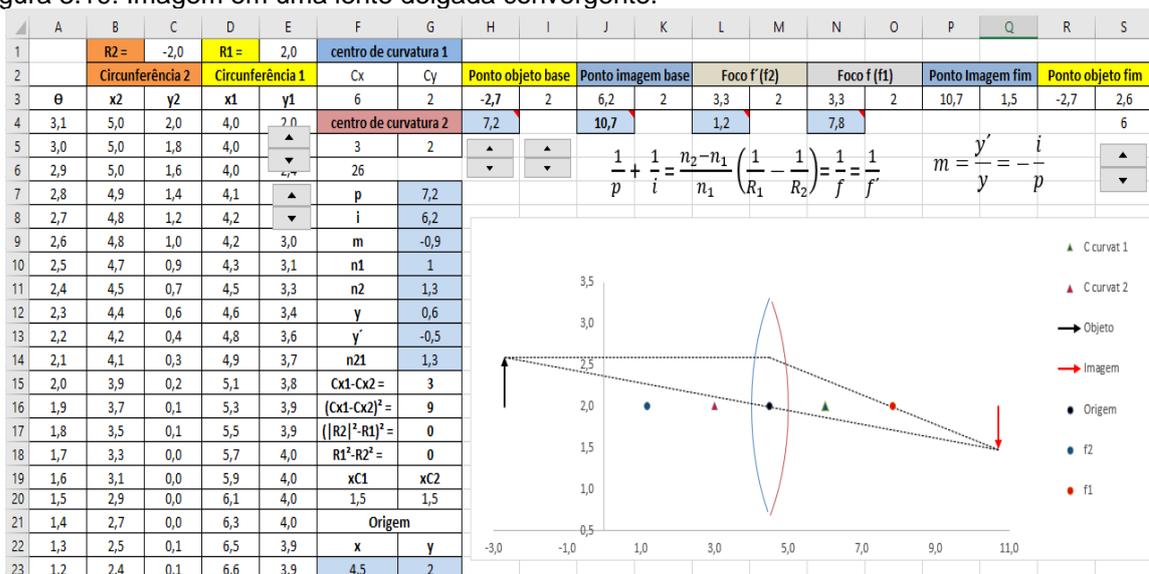
O valor de  $x_1$  e  $x_2$  na figura 3.19 estão representados por  $x_{C1}$  e  $x_{C2}$  nas colunas F e G na linha 20.

Figura 3.18: – Esquema para equacionar a localização da origem O da lente.



Fonte: O autor.

Figura 3.19: Imagem em uma lente delgada convergente.



Fonte: O autor.

### Dicas de utilização da planilha:

Começando com o objeto na posição de “infinito negativo” veremos que a imagem é real, invertida e se forma no foco  $f_1$  com tamanho igual a zero, quando o objeto ultrapassa o foco  $f_2$  a imagem se torna virtual e direita. No vértice a imagem é igual ao objeto, o que podemos ver removendo a divisão por zero (como feito nas planilhas anteriores). No caso de mudarmos o objeto para o lado direito da lente, devemos usar a imagem como se fosse o objeto e vice-versa, a ampliação também deve ser invertida.

### 3.9. Interferência de duas ondas

Já vimos no capítulo de Mecânica a soma de duas ondas progressivas vindas do mesmo ponto, agora precisamos investigar um ponto do espaço que recebe duas ondas vindas de lugares diferentes. Isso porque usaremos raciocínios semelhantes para analisar os fenômenos de interferência e difração de ondas eletromagnéticas.

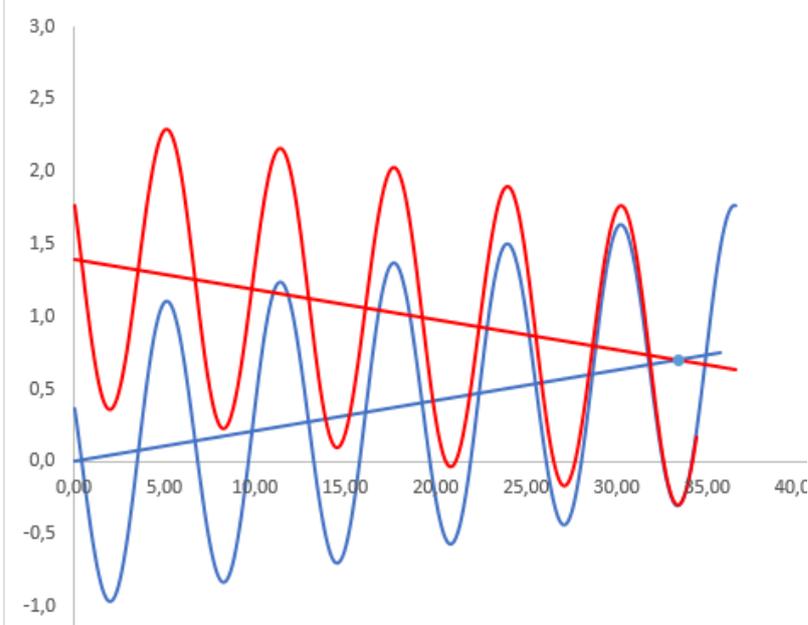
Iniciamos então por duas ondas planas, cada uma monocromática transversal e progressiva, semelhante a seção 2.9 do Capítulo 2, elas terão a mesma frequência e mesmo comprimento de onda, também mesma constante de fase. Apesar das ondas eletromagnéticas possuírem campos elétricos e campos magnéticos, as forças elétricas na interação dessas ondas com os elétrons de um anteparo, por exemplo, são extremamente maiores que as forças devido a interação magnética e podemos observar somente o que acontece com o campo elétrico.

$$E_1(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - \omega t), \quad (3.25)$$

$$E_2(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - \omega t) . \quad (3.26)$$

A situação que desejamos investigar é ilustrada na figura 3.20.

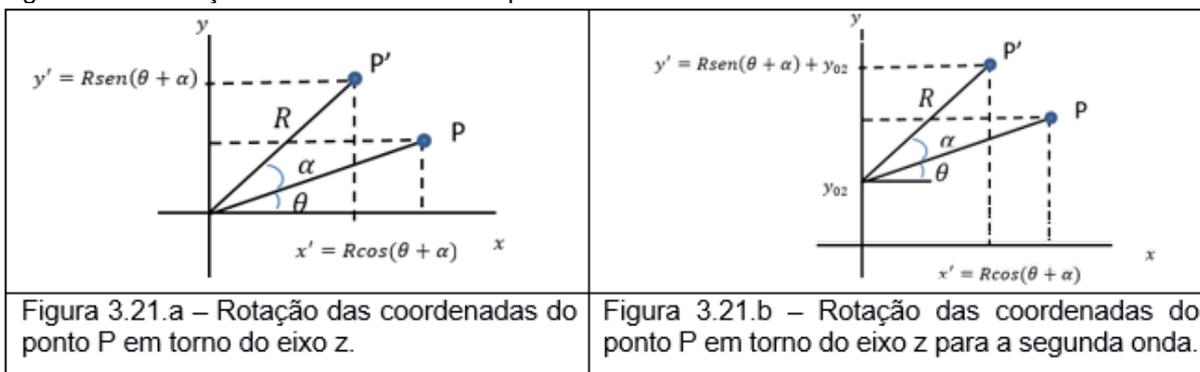
Figura 3.20: Duas ondas planas de mesma frequência são analisadas num ponto do espaço, elas são emitidas de posições diferentes.



Fonte: O autor.

Podemos construir um gráfico de duas funções como as dadas pelas equações (3.25) e (3.26), colocar a origem da segunda delas numa posição  $y_{02}$  e a da outra na origem do gráfico. Depois disso podemos aplicar a todos os pontos da primeira função uma rotação de um ângulo  $\alpha_1$  em torno do eixo z (figura 3.21.a), e aos pontos da outra função uma rotação de  $\alpha_2$  (figura 3.21.b).

Figura 3.21: Rotação das coordenadas do ponto P em torno do eixo z.



Fonte: O autor.

Da figura 3.21.a observamos que:

$$x'_1 = R \cos(\theta + \alpha) = R \cos \theta \cos \alpha - R \text{sen} \theta \text{sen} \alpha , \quad (3.27)$$

$$y'_1 = R \text{sen}(\theta + \alpha) = R \text{sen} \theta \cos \alpha + R \cos \theta \text{sen} \alpha , \quad (3.28)$$

$$x_1 = R \cos \theta , \quad (3.29)$$

$$y_1 = R \operatorname{sen} \theta . \quad (3.30)$$

E da figura 3.21.b observamos que:

$$x'_2 = R \cos(\theta + \alpha) = R \cos \theta \cos \alpha - R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha , \quad (3.31)$$

$$y'_2 = R \operatorname{sen}(\theta + \alpha) + y_{02} = R \operatorname{sen} \theta \cos \alpha + R \cos \theta \operatorname{sen} \alpha + y_{02} , \quad (3.32)$$

$$x_2 = R \cos \theta , \quad (3.33)$$

$$y_2 = R \operatorname{sen} \theta + y_{02} . \quad (3.34)$$

A rotação de um ângulo  $\alpha$  é conseguida então com as transformações:

$$x'_1 = x_1 \operatorname{coss} \alpha - y_1 \operatorname{sens} \alpha , \quad (3.35)$$

$$y'_1 = x_1 \operatorname{sens} \alpha + y_1 \operatorname{coss} \alpha , \quad (3.36)$$

$$x'_2 = x_2 \operatorname{coss} \alpha - (y_2 - y_{02}) \operatorname{sens} \alpha , \quad (3.37)$$

$$y'_2 = y_{02} + x_2 \operatorname{sens} \alpha + (y_2 - y_{02}) \operatorname{coss} \alpha . \quad (3.38)$$

Podemos agora construir a planilha para este caso.

- Precisaremos de botões para controlar as retas que serão as guias para as duas ondas, ou seja, precisamos das inclinações das retas e dos pontos onde cortam o eixo vertical,  $y(x = 0)$ . Lembrando que as funções  $\operatorname{COS}(\text{num})$  e  $\operatorname{SEN}(\text{num})$  retornam o cosseno e o seno, respectivamente, de um ângulo “num” em radianos, como estamos mais acostumados a tratar ângulos em graus podemos usar o ângulo em graus e transformá-lo em radianos com a função  $\operatorname{RADIANOS}(\text{graus})$ . Iremos usar nessa planilha a tangente, o seno e o cosseno do ângulo de rotação, além disso é interessante poder controlar também a constante de fase de cada onda (seção 2.3, equação 2.7 do capítulo 2).
- Os valores de  $x$  para a construção do gráfico devem ser próximos para que o formato das ondas não fique distorcido, chamamos de “passo de  $x$ ” na planilha.
- Agora precisamos gerar os pontos que sofrerão as rotações, ou seja, os pontos das funções de onda dadas pelas equações (3.25) e (3.26), entretanto usaremos a notação  $y$  ao invés de  $E$ , pois  $E$  é a componente vertical da onda. Assim, na coluna B a partir da linha 11 teremos os valores de  $x$  e na coluna C a partir da linha 11 os valores de amplitude da primeira onda  $y(x, t) = \operatorname{sen}(kx - wt)$ , ou seja,  $\operatorname{SEN}(B11-A\$11+C\$8)$  e a amplitude, o número de onda  $k$  e a frequência  $w$  foram escolhidas com sendo igual a unidade. Na coluna G temos os valores para a segunda onda.

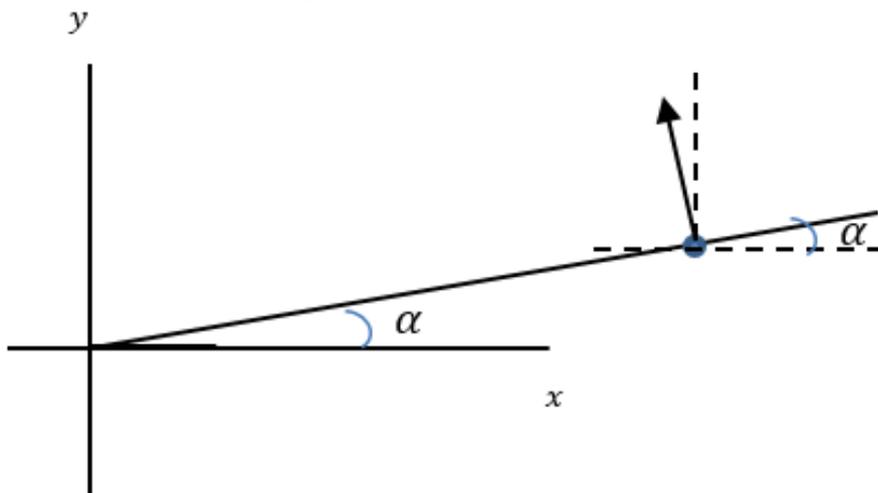
- A reta guia para a onda construída no passo anterior é dada pela equação da reta  $y = xt g \alpha$ , assim a onda serpenteará essa reta.
- Usando as transformações dadas pelas equações (3.35) e (3.36) construímos as colunas E e F a partir da linha 11 que são as rotações dos pontos criados no passo 3.2.4, ou seja, a nova onda tem uma inclinação  $\alpha_1$  e parte da origem do gráfico  $(0,0)$ .
- Temos que ter um botão para poder evoluir a variável tempo, o que é feito na coluna A linha 11.
- Para a segunda onda podemos usar os mesmos pontos  $x$ , mas precisamos de outra coluna com a onda a ser rotacionada. Usamos a coluna G a partir da linha 11 para isso.
- A nova reta guia então usa o ângulo de rotação  $\alpha_2$  e a equação  $y = y_{02} + xt g \alpha_2$ .
- Agora usando as transformações dadas pelas equações (3.37) e (3.38) construímos as colunas I e J a partir da linha 11 que são as rotações dos pontos criados no quarto passo, ou seja, a nova onda segue uma inclinação  $\alpha_2$  e parte da posição  $(0, y_{02})$ .
- Agora podemos tratar do ponto onde as retas se encontram, o qual será o ponto de interesse para observarmos a interferência das duas ondas. Esse ponto  $(x, y)$  satisfaz as duas equações das duas retas, ou seja:

$$x^* = \frac{y_{02} - y_{01}}{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}, \quad (3.39)$$

$$y^* = \frac{y_{02}tg\alpha_1 - y_{01}tg\alpha_2}{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}. \quad (3.40)$$

- Com o ponto  $(x, y)$  de encontro das retas dados pelas equações (3.39) e (3.40) encontramos os valores das amplitudes das duas ondas antes da rotação, ou seja,  $y_1 = sen(x^* - t)$  e  $y_2 = y_{02} + sen(x^* - t)$  e então aplicamos as transformações dadas pelas equações de (3.35) a (3.38) obtendo as coordenadas verticais de cada onda  $y'_1$  e  $y'_2$ . Agora precisamos saber a amplitude de cada onda em relação a sua reta guia e obtemos isso por fazer a as diferenças  $y'_1 - y^*$  e  $y'_2 - y^*$ . Finalmente, lembrando que essa amplitude representa o módulo do vetor campo elétrico, por exemplo, num anteparo vertical, para somar as ondas precisamos decompor suas componentes no eixo no eixo  $y$ , ou seja,  $E_{1y} = (y'_1 - y^*)cos\alpha_1$ , assim como  $E_{2y} = (y'_2 - y^*)cos\alpha_2$ . O ângulo  $\alpha$  é mostrado na figura 3.22.

Figura 3.22: Esquema mostrando o ângulo para decompor o vetor campo elétrico.



Fonte: O autor.

As componentes do vetor campo elétrico resultante são então dadas por:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} , \quad (3.41)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} . \quad (3.42)$$

O módulo do vetor campo elétrico no ponto de encontro das retas guias é dado por:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} . \quad (3.43)$$

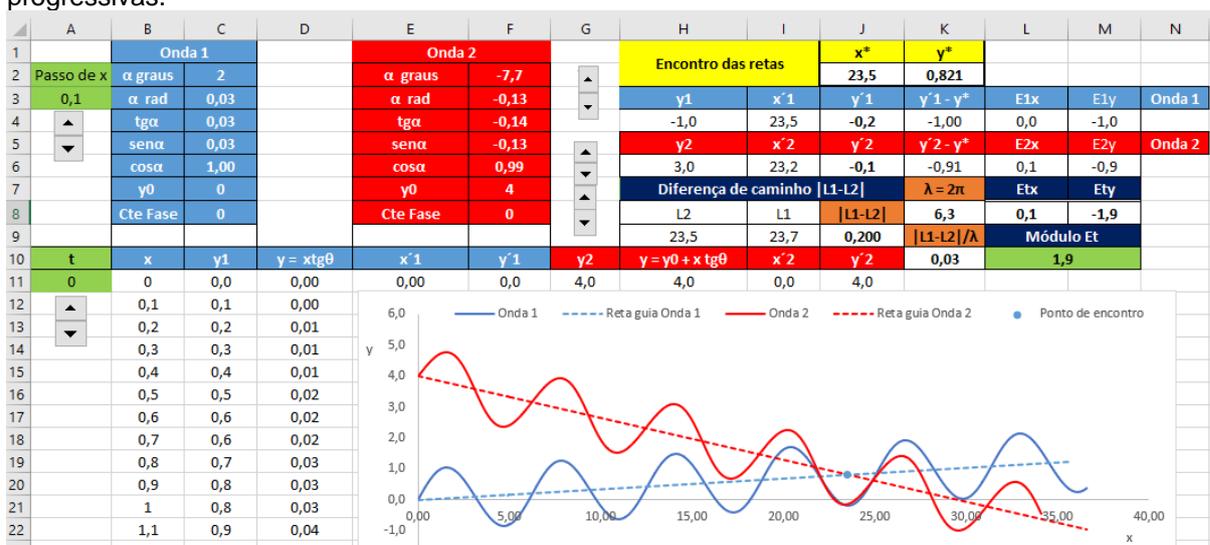
- Considerando o caso das constantes de fase nulas, podemos analisar a amplitude da onda resultante pela diferença de caminho  $|L_2 - L_1|$  que as duas ondas percorrem até chegarem ao ponto de encontro. Se a diferença for igual a um número inteiro de meios comprimentos de onda a interferência será destrutiva, se for igual a um número inteiro de comprimentos de onda a interferência será construtiva.

$$|L_2 - L_1| = \frac{m}{2} \lambda \quad \text{com} \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad \text{interferência destrutiva} \quad (3.44)$$

$$|L_2 - L_1| = m \lambda \quad \text{com} \quad m = 0, 1, 2, 3 \dots \quad \text{interferência construtiva} \quad (3.45)$$

O resultado final da planilha é mostrado na figura 3.23.

Figura 3.23: Planilha para o estudo da interferência de duas ondas transversais, monocromáticas e progressivas.



Fonte: O autor.

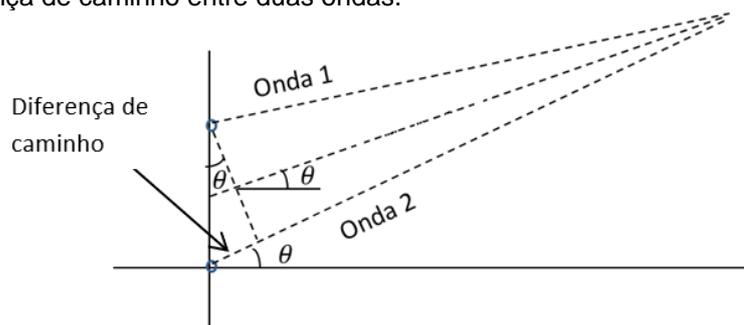
### Dicas de utilização da planilha:

Escolhendo  $\alpha$  graus para a onda azul e para a vermelha estamos escolhendo o ponto onde os cálculos de interferência serão realizados, podemos então variar o tempo e ver o que acontece com a amplitude do campo elétrico resultante “Módulo Et” na célula L10. Podemos escolher uma diferença de caminho nula, como por exemplo,  $\alpha_{\text{azul}} = -\alpha_{\text{vermelho}}$  e constante de fase nula, deveríamos ter pela equação 3.45 um máximo de interferência. No entanto, ao variar o tempo o valor do Módulo Et varia de próximo de zero a próximo de dois! Escolhendo ainda uma constante de fase igual a  $\pi$  ao variar o tempo o valor do Módulo Et varia de próximo de zero a próximo de 0,17! Então percebemos que as equações 3.44 e 3.45 valem para o valor médio no tempo do campo total na posição escolhida, o que faz sentido quando observamos, por exemplo, os máximos em um experimento de fenda dupla, pois a luz oscila muito rápido ( $\sim 10^{14}$  Hertz) e não temos condições de observar a sua variação no tempo.

### 3.10. Intensidades no problema de interferência em fenda dupla

Podemos usar o que foi apresentado na secção 3.3 para tratar o experimento para a interferência em fenda dupla. Consideremos então duas ondas eletromagnéticas partindo uma de cada fenda. Então, uma região de interferência construtiva, dessas duas ondas num ponto P de um anteparo ocorrerá se, a diferença de caminho entre elas, até o ponto P, for igual a um número inteiro de comprimentos de onda, como mostrado na figura 3.24.

Figura 3.24: Diferença de caminho entre duas ondas.



Fonte: O autor.

Se as intensidades dos campos elétricos das duas ondas são dadas por,

$$E_1(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - wt), \quad (3.46)$$

$$E_2(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - wt + \phi). \quad (3.47)$$

O campo elétrico resultante num certo ponto do espaço será igual a soma  $E_1(x, t) + E_2(x, t)$ :

$$E = E_1(x, t) + E_2(x, t) = E_0 \text{sen}(kx - wt) + E_0 \text{sen}(kx - wt + \phi). \quad (3.48)$$

Esta soma pode ser realizada com auxílio da relação:

$$\text{sen}(A) + \text{sen}(B) = 2 \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

onde,  $A = kx - wt$  e  $B = kx - wt + \phi$ , com isso temos:

$$E = 2E_0 \text{sen}\left(kx - wt + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (3.49)$$

A intensidade da energia elétrica que chega num ponto  $x$  é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico, ou seja:

$$I \propto \left[2E_0 \text{sen}(2kx - 2wt + \phi) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^2. \quad (3.50)$$

As variações, tanto espaciais quanto temporais de ondas eletromagnéticas na região do espectro visível são muito rápidas, em um segundo por exemplo o campo elétrico da luz vermelha varia  $10^{14}$  vezes com um comprimento de onda  $\lambda \approx 0,0000006$  metros, ou seja, em um milímetro temos quase 1700 comprimentos de onda. Então o que vemos no anteparo é o valor médio dessa intensidade. O valor médio de  $\text{sen}^2(2kx - 2wt + \phi)$  é  $\frac{1}{2}$ , assim,

$$I \propto 2E_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (3.51)$$

No caso da onda representada pela equação (2.52) a intensidade no anteparo devido a uma das ondas é dada por  $I_0 \propto \frac{E_0^2}{2}$ , temos:

$$\frac{I}{I_0} = 4\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (3.52)$$

Podemos explicitar a dependência da constante de fase  $\phi$  com o ângulo de observação no anteparo pela relação:

$$\frac{\text{constante de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferença de caminho}}{\lambda}, \quad (3.53)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda das ondas, ou seja,

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{d \sin\theta}{\lambda}. \quad (3.54)$$

onde  $d$  é a distância entre as fendas.

Finalmente obtemos a distribuição angular de intensidades para os máximos de interferência:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right). \quad (3.55)$$

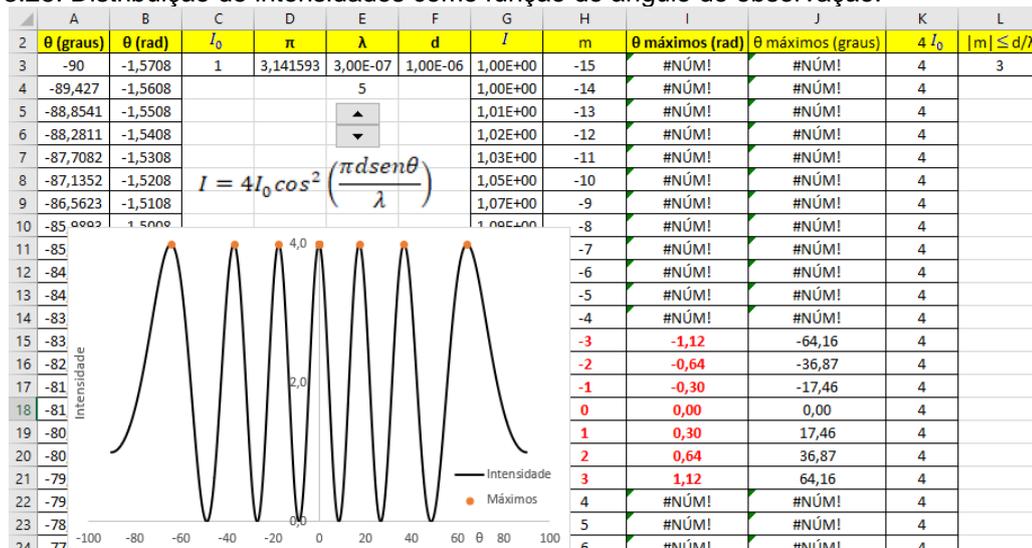
Podemos agora construir uma planilha para simular a equação (3.55).

- Vamos precisar varrer o ângulo  $\theta$  para vários valores, podemos usar o intervalo  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .
- Temos que ter uma célula para o valor da intensidade  $I_0$ .
- Também temos que ter os valores de  $\lambda$  e  $d$ , nesse caso é interessante poder variar o comprimento de onda com um botão.
- A intensidade resultante da interferência entre as duas ondas é calculada então pela equação (3.55).
- Temos condições então de traçar o gráfico da intensidade em função do ângulo  $\theta$ .
- É interessante inserir no gráfico a localização dos máximos  $m$  de interferência, já que eles devem estar localizados nas intensidades máximas. Para isso,

temos que variar  $m$  a partir de seu valor máximo dado por  $m_{m\acute{a}x} = 0, \pm \frac{d}{\lambda}$  e que é obtido da necessidade de  $\text{sen}\theta \leq 1$ . A localização desses máximos é dada pela coordenada horizontal  $\theta = \text{arcsen}\left(m \frac{\lambda}{d}\right)$  e podemos usar  $4I_0$  como sendo a coordenada vertical.

O resultado da planilha é mostrado na figura 3.25.

Figura 3.25: Distribuição de intensidades como função do ângulo de observação.



Fonte: O autor.

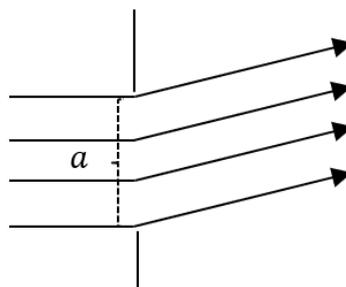
### Dicas para a utilização da planilha:

Podemos testar os limites para a relação entre comprimento de onda e distância entre as fendas, ou seja, para  $\lambda > d$  somente o máximo central deve existir. Na célula L3 é mostrado a parte inteira da razão  $d/\lambda$  e o número de máximos é então duas vezes esse número inteiro mais o zero do máximo central, pela simetria do problema temos máximos com  $m > 0$  e máximos com  $m < 0$ .

### 3.11. Intensidade para a difração em fenda única.

Anteriormente consideramos que somente uma onda atravessava uma fenda, ou seja, a fenda era muito pequena, mas agora vamos considerar que a fenda é extensa e muitas ondas passam por ela ao mesmo tempo. A largura da fenda deve ser maior que o comprimento de onda da onda (monocromática e coerente) incidente sobre ela, a figura 3.26 mostra uma fenda de largura  $a$  e o anteparo onde são observadas as ondas está muito longe da fenda, ou seja, a distância  $D$  do anteparo as fendas é  $D \gg a$ . Este caso é conhecido como difração de Fraunhofer.

Figura 3.26: Fenda única de largura  $a$ , anteparo muito distante da fenda.



Fonte: O autor.

Fazendo  $b = \frac{a}{2}$  podemos considerar que se uma onda saindo da parte superior da fenda interferir destrutivamente com outra saindo de  $b$ , todas as outras ondas da parte de cima da fenda terão interferência destrutiva com as de baixo, pois as diferenças de caminho são as mesmas.

O primeiro mínimo do espectro de difração ocorrerá em  $\frac{a}{2} \text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2}$ , ou seja,

$$a \text{sen}\theta = \lambda . \quad (3.56)$$

Além disso, toda vez que separamos a largura  $a$  em um número  $N$  par de partes iguais, se o raio da parte de cima de uma das partes estiver defasado de  $\frac{\lambda}{2}$  do raio da parte de baixo ocorrerá interferência destrutiva em toda a fenda, e teremos um mínimo de difração num ângulo em que  $\frac{a}{N} \text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2}$ , ou seja,

$$a \text{sen}\theta = \frac{N}{2} \lambda . \quad (3.57)$$

onde  $N = 2,4,6, \dots$

Ou então fazemos  $m = \frac{N}{2}$  e teremos:

$$a \text{sen}\theta = m \lambda . \quad (3.58)$$

onde  $m = 1,2,3 \dots$  localiza os mínimos.

Agora podemos analisar a distribuição de intensidades dessas ondas no anteparo. Considerando as diferenças de fase  $\phi$  e de caminho  $y \text{sen}\theta$ , semelhante a equação (3.54), entre a primeira onda na parte superior da fenda e outra numa distância  $y$  temos:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} y \text{sen}\theta . \quad (3.59)$$

Além disso,  $E(x, \phi, t) = E_0 \text{sen}(kx + \omega t + \phi)$  e para descobrirmos qual é o campo total que chega em ponto P do anteparo em uma posição dada por  $\theta$ , temos que resolver a integral:

$$E_t(x, y, t) = \frac{\int_0^a E(x, y', t) dy'}{\int_0^a dy'} \quad (3.60)$$

que é o valor médio de campo elétrico que chega em um ponto do anteparo localizado em  $y$ , a variável de integração  $y'$  é contabilizada na fenda. De (3.59) obtemos a dependência de  $dy'$  com  $d\phi$ , ou seja,

$$dy' = \frac{\lambda}{2\pi \text{sen}\theta} d\phi. \quad (3.61)$$

Com essa mudança de variáveis a equação (3.60) torna-se:

$$E_t(x, \theta, t) = \frac{\lambda}{2\pi a \text{sen}\theta} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen}\theta} E_0 \text{sen}(kx + \omega t + \phi) d\phi. \quad (3.62)$$

O ângulo  $\theta$  está relacionado à  $y$  por  $\text{tg}\theta = \frac{y}{D}$  e resolvendo (3.62) temos,

$$E_t(x, \theta, t) = -\frac{\lambda E_0}{2\pi a \text{sen}\theta} \left[ \cos\left(kx + \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen}\theta\right) - \cos(kx + \omega t) \right]. \quad (3.63)$$

E usando a identidade  $\cos A - \cos B = 2 \text{sen} \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{B-A}{2}$ , obtemos:

$$E_t(x, \theta, t) = \frac{\lambda E_0}{\pi a \text{sen}\theta} \left[ \text{sen}\left(\frac{2kx + 2\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen}\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \text{sen}\theta\right) \right]. \quad (3.64)$$

E analogamente a (3.50) temos para a intensidade no anteparo:

$$I(x, \theta, t) \propto \left(\frac{\lambda E_0}{\pi a \text{sen}\theta}\right)^2 \left[ \text{sen}\left(\frac{2kx + 2\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen}\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \text{sen}\theta\right) \right]^2. \quad (3.65)$$

O valor médio dessa intensidade é então dado por:

$$I(\alpha) \propto \frac{1}{2} E_0^2 \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\alpha^2}, \quad (3.66)$$

onde  $\alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta$ .

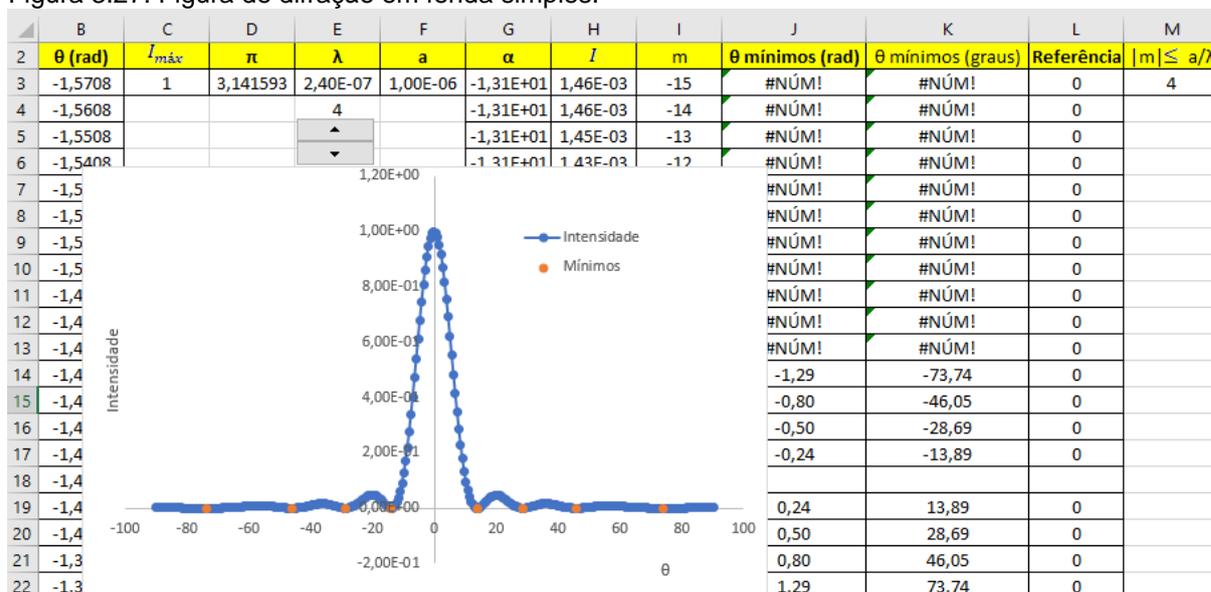
Comparando com a intensidade máxima para o caso de  $\alpha = 0$ , ou seja, o máximo central, temos finalmente:

$$I(\alpha) = I_{m\acute{a}x} \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\alpha^2}. \quad (3.67)$$

Estamos prontos para construir a planilha para o estudo da figura de difração em fenda simples. Podemos usar a planilha da seção anterior substituindo  $I_0$  por  $I_{m\acute{a}x}$  e  $d$  por  $a$ . Lembrando que agora serão avaliadas as posições dos mínimos que podem ser colocados em  $y = 0$ . O cálculo do maior mínimo é feito por  $m \leq \frac{a}{\lambda}$ .

O resultado desta planilha é mostrado na figura 3.27.

Figura 3.27: Figura de difração em fenda simples.



Fonte: O autor.